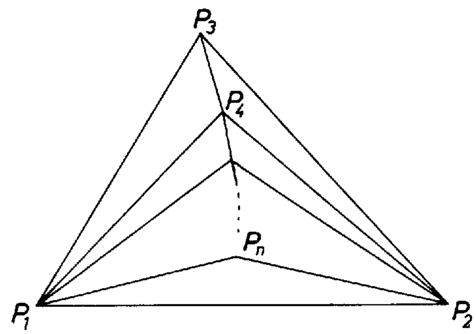
Megoldás. Megmutatjuk, hogy a keresett szám 1991; általában n piros pont esetén, ahol $n \geq 3$, $2n-5$ kék pontra szükség lehet, többre nem.



3. ábra

Először olyan P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ pontrendszert adunk meg, amelyikhez legalább $2n-5$ kék pontra van szükség. Egy $P_1P_2P_3$ háromszögbe rajzoljunk például egy P_3-ból induló, a P_1P_2 oldal egy belső pontjáig menő körívet, és ennek a belsejében jelöljük ki sorra a további $n-3$ pontot *(3. ábra.)* Ekkor a $P_1P_iP_{i+1}$, $P_2P_iP_{i+1}$ $(3 \leq i \leq n-1)$ és a $P_1P_2P_n$ háromszögek közül semelyik kettőnek sincs közös belső pontja, tehát mindegyik belsejében kell kék pontnak lennie. Így legalább

$$2(n-3)+1 = 2n-5$$

kék pontra van szükség.

Legyen most $P_1, P_2, \ldots, P_n$ tetszés szerinti piros pontrendszer. Eljárást adunk a kék pontok elhelyezésére. Válasszunk egy e egyenest, amelyik nem párhuzamos semelyik P_iP_j egyenessel, és egy elég kis d távolságot, például kisebbet az összes piroscsúcsú háromszög magasságainál. Ez lehetséges, mert csak véges sok pontpár és véges sok háromszög van.

Húzzunk most mindegyik P_i ponton át egy e-vel párhuzamos e_i egyenest. Ekkor lesz olyan e_u, amelyiknek az egyik oldalán nincs piros pont, és olyan e_v, amelyiknek az e_u-t nem tartalmazó oldalán nincsen.

Ezeken az egyeneseken nincs piros pont P_u-n, illetőleg P_v-n kívül, mert nincs három egy egyenesen levő piros pont, e választása szerint pedig ezeken az egyeneseken kettő sem lehet. Minden további e_i egyenes metszi a P_uP_v szakaszt, ami a pontrendszer konvex burkának a belsejében halad.

Helyezzünk egy-egy kék pontot minden olyan P_i kezdőpontú félegyenesre P_i-től d távolságban, amelyiknek van közös pontja a konvex burok belsejével. Ezzel a feladat követelményeit teljesítettük. Egy piros csúcsú háromszög csúcsain át húzott egyenesek ugyanis különböznek az oldalegyenesektől. Így az egyik egyenes valamelyik félegyenesének van közös pontja a háromszög belsejével. Az ezen kijelölt kék pont d választása folytán a háromszög belsejében van.

Számoljuk össze a kék pontokat. Két-két kék pontot helyeztünk a konvex burok belsejében levő piros pontok közelébe, egyet-egyet a konvex burok határán levő piros pontokhoz, kivéve P_u és P_v-t, amikhez nem helyeztünk kék pontot. Jelöljük b-vel a konvex burok csúcsainak számát. A burok oldalszakaszainak belsejében nem lehet piros pont, így a burok belsejében $n-b$ piros pont van. A kék pontok száma tehát

$$2(n-b)+b-2 = 2n-b-2 \leq 2n-5.$$

Ezzel a bizonyítandó állítás második részét is beláttuk.

Megjegyzések: 1. Párhuzamos egyenesek helyett választhatunk egy O pontot a konvex burkon kívül úgy, hogy ne legyen rajta semelyik P_iP_j egyenesen se, és az $e_i = OP_i$ egyeneseken helyezzük el a kék pontokat a fenti előírás szerint.

2. Könnyen látható, hogy az általános esetben is szükség van $2n-b-2$ kék pontra. Ez következik, ha belátjuk, hogy bárhogyan is bontjuk a pontok konvex burkát olyan háromszögekre, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös belső pontja, a háromszögek száma mindig $2n-b-2$. Ez akkor is igaz, ha lehet kettőnél több pont is egy egyenesen, csak nem mind.

Létezik a kívánt tulajdonságú felbontás. Egy ilyenhez juthatunk például úgy, hogy a pontrendszer konvex burkát háromszögekre bontjuk egy csúcsból induló átlókkal, majd veszünk egy-egy pontot, amelyik nem csúcsa megrajzolt háromszögnek, és összekötjük az őt tartalmazó háromszög vagy háromszögek csúcsaival. Véges számú pont esetén így véges számú lépésben kívánt tulajdonságú felbontáshoz jutunk.

Egy kívánt tulajdonságú felbontás háromszögeinek számát h-val jelölve ezekben a szögek összege $h \cdot 180°$. Ezeknek a szögeknek a csúcsai pontrendszerünk pontjai. A konvex burok belsejében levő pontok mindegyike körül összesen $360°$ keletkezik (a felbontástól függetlenül). A konvex burok határán levő pontok körül keletkező szögek összege viszont egy b-szög szögeinek összege[1], ami $(b-2) \cdot 180°$. Így

$$h \cdot 180° = (n-b) \cdot 360° + (b-2) \cdot 180°, \quad \text{tehát} \quad h = 2n-b-2,$$

amint állítottuk.

[1] Ha egy sokszög oldalszakaszain további pontok vannak, és ezeket is csúcsoknak tekintjük egyenként $180°$ belső szöggel, akkor a szögek összegére vonatkozó formula nyilvánvalóan érvényben marad.