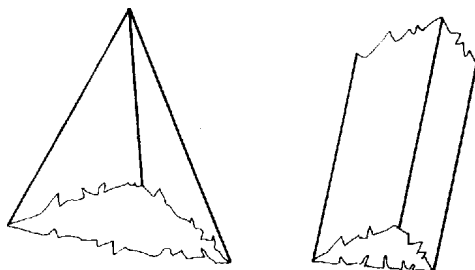


2. Egy konvex testnek két háromszöglapja és három négyszöglapja van. Kössük össze az egyik háromszöglap mindegyik csúcsát a vele szemközti négyszöglap átlójának metszéspontjával. Bizonyítsuk be, hogy a három egyenes egy ponton megy át.

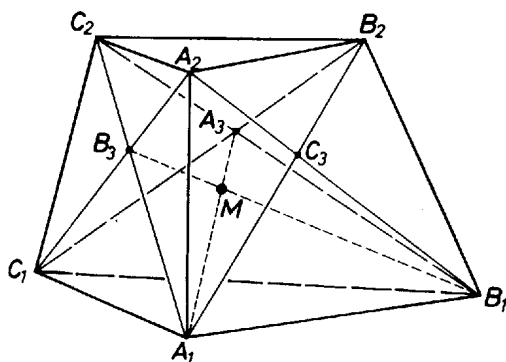
**Megoldás.** Meg kell határoznunk a test alakját. Egy négyszöglap éleihez csatlakozik mind a négy további lap. Mivel a test konvex, így a testet a négyszöglapok síkjai által határolt egyik konvex térrészből a háromszöglapok síkjai metszik ki.



1. ábra

Ez a térrész egy triéder (háromoldalú testszöglet, amelyiknek a lapszögei  $180^\circ$ -nál kisebbek), vagy végtelen, háromoldalú hasáb (1. ábra). Ennek a határlapjain a további két metsző sík között négyszögeknek kell keletkezniük, tehát a két sík metszévonalának a térrészen kívül kell lennie, vagy párhuzamos a két sík. A háromszöglapoknak tehát nincs közös pontja.

Legyenek ezek a lapok  $A_1B_1C_1$  és  $A_2B_2C_2$ , a további élek pedig  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  (2. ábra). Jelöljük a  $B_1B_2C_2C_1, C_1C_2A_2A_1, A_1A_2B_2B_1$  lapok átlójának a metszéspontját rendre  $A_3, B_3, C_3$ -mal, és nézzük az  $A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3$  egyeneseket.



2. ábra

Az  $A_1B_1C_2$  síkmetszet  $B_1C_2$  oldalának belső pontja  $A_3$ ,  $A_1C_2$ -nek pedig  $B_3$ , így  $A_1A_3$  és  $B_1B_3$  metszi egymást a háromszög belsejében egy  $M$  pontjában. Hasonlóan látható, hogy  $C_1C_3$  is metszi  $A_1A_3$ -at is,  $B_1B_3$ -at is.

Az  $A_1B_1C_2$  síknak egyik oldalára esik  $C_1$ , a másikra  $A_2$  és  $B_2$ , tehát  $C_1$  és  $C_3$  is ellenkező oldalára esik.  $C_1C_3$ -nak tehát egy közös pontja van a síkkal, és így csak akkor metszheti  $A_1A_3$ -at is,  $B_1B_3$ -at is, ha ez a pont  $M$ . A három egyenes tehát egy ponton megy keresztül, és ezt kellett bizonyítanunk.

*Megjegyzések:* 1. A megoldást többen arra a tételre hivatkozva fejezték be, hogy ha három egyenes páronként metszi egymást, akkor vagy egy síkban vannak, vagy egy ponton mennek keresztül. Ez igaz három helyett akárhány egyenesre, és így látható be. Ha egy ponton mennek át az egyenesek, akkor igaz az állítás. Ha ez nem áll, akkor vegyünk egy  $P$  metszéspontot. Egy  $e$  egyenes, amelyik nem megy át  $P$ -n, a  $P$ -n átmenő egyeneseket (tehát legalább két egyenest)  $P$ -től különböző pontban metsz. Ekkor azonban a  $P$ -n átmenő egyenesek benne vannak a  $P$  és  $e$  által meghatározott síkban. Ebben a síkban minden további egyenes is benne van, hiszen különböző pontokban metsz legalább két  $P$ -n átmenő egyenest.

2. A feladat megoldásában valójában három metsző síkról van szó, az  $A_1B_1C_2$  háromszögen kívül az  $A_1B_2C_1$  és az  $A_2B_1C_1$  háromszög síkjáról. A fenti megoldás egy változatához jutunk, ha azt látjuk be, hogy  $A_1A_3, B_1B_3$  és  $C_1C_3$  ezek közül rendre két-két sík metszévonalára, és ezek nem lehetnek párhuzamosak.

3. Bár a megoldás során ismételten hivatkoztunk a test konvex voltára, ez többnyire csak bizonyos metszéspontok létrejöttének a biztosításához kellett. Felmerül a kérdés, hogy ez nem biztosítható-e egyszerűbb feltételekkel is. Ennek végiggondolását az olvasóra hagyjuk.

4. A feladat megfogalmazható síkbeli feladatként, csak azt kell figyelembe venni, hogy a test alakját vizsgálva arra jutottunk, hogy  $A_1A_2, B_1B_2$  és  $C_1C_2$  egy ponton megy keresztül, vagy párhuzamosak. A feladat tehát így szól:

Az  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  egyenesek egy ponton mennek keresztül, vagy párhuzamosak.  $A_1B_2$  és  $B_1A_2$ ,  $B_1C_2$  és  $C_1B_2$ ,  $C_1A_2$  és  $A_1C_2$  metszéspontját sorra  $C_3$ ,  $A_3$ ,  $B_3$ -mal jelölve bizonyítandó, hogy  $A_1A_3$ ,  $B_1B_3$  és  $C_1C_3$  egy ponton megy keresztül, vagy párhuzamosak. (Feltesszük, hogy  $A_3$ ,  $B_3$  és  $C_3$  létrejön.) Bizonyításra kényelmes út az ábrát egy térbeli alakzat vetületeként felfogni. Egy síkban maradó bizonyítás igen nehéznek látszik.