**I. megoldás**. A nevező pozitív, mert a feladat feltételei mellett $b+c>1$, és így

$$(b+c)^n \geq b+c > c.$$

Elegendő ennek folytán a nevezővel átszorozva keletkező

$$(ab+c)^n - c \leq a^n(b+c)^n - a^n c \tag{1}$$

egyenlőtlenséget bizonyítani. Ezt teljes indukcióval tesszük. Az $n=1$ esetben egyenlőség áll fenn.

Jelöljük a bal oldalt $A_n$-nel, a jobb oldalt $B_n$-nel. Tegyük fel, hogy $n$-nek valamilyen $m$ értékére $A_m \leq B_m$, és nézzük meg, mennyivel változik az egyik oldal, mennyivel a másik, ha $m$-et eggyel növeljük.

$$A_{m+1} - A_m = (ab+c)^m(ab+c-1).$$
$$B_{m+1} - B_m = a^m(b+c)^m(ab+ac-1) - a^m(a-1)c.$$

Az $ab+ac-1$ különbségről a könnyebb összehasonlítás érdekében $ab+c-1$-re térve, majd az első tag első és második tényezőjét egy hatvánnyá alakítva az utóbbi különbség így írható:

$$\begin{gathered} B_{m+1} - B_m = a^m(b+c)^m(ab+c-1) + a^m(b+c)^m(ac-c) - a^m(a-1)c = \\ = (ab+ac)^m(ab+c-1) + a^m(a-1)c[(b+c)^m - 1]. \end{gathered}$$

Itt az első tag nagyobb az $A_{m+1} - A_m$ különbségnél, ha $a>1$, mert $ab+ac > ab+c$, a második pedig pozitív. Így

$$B_{m+1} - B_m > A_{m+1} - A_m, \text{ azaz } B_{m+1} - A_{m+1} > B_m - A_m.$$

Indukciós feltevésünk szerint a jobb oldal nem negatív, így a bal pozitív. Ezzel azt láttuk be, hogy ha (1) teljesül egy $n$ értékre, és $a>1$, akkor minden nagyobb értékre már szigorú egyenlőtlenség érvényes (1)-ben.

Mivel $n=1$-re egyenlőség áll (az eredeti egyenlőtlenségben minden $a, c$ és 0-tól különböző $b$ értékre), így (1)-ben és az eredeti egyenlőtlenségben is $a <$ jel érvényes minden 1-nél nagyobb $n$ egészre és 1-nél nagyobb $a$-ra.

Ha $a=1$, akkor egyenlőtlenségeink egyenlőségbe mennek át. Ezzel a feladat állítását igazoltuk, és tisztáztuk azt is, hogy milyen esetekben áll fenn egyenlőség.

**II. megoldás.** Feltehetjük, hogy $n>1$ és $a>1$, mert $n=1$ esetén a két oldal egyenlő, bármi is $a$, és hasonlóan egyenlőség áll fenn $a=1$ esetén minden $n$-re.

Az (1) egyenlőtlenséget bizonyítjuk. Rendezzük át a következő módon:

$$c(a^n - 1) \leq [a(b+c)]^n - (ab+c)^n. \tag{2}$$

Alkalmazzuk mindkét oldalra az $n \geq 2$ esetén érvényes

$$u_n - v_n = (u-v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \ldots + uv^{n-2} + v^{n-1})$$

azonosságot. A jobb oldalon az alapok különbsége $c(a-1)$, így a bizonyítandó állítás a következő alakot ölti:

$$\begin{gathered} c(a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1) \leq c(a-1)[(a^{n-1}(b+c)^{n-1} + \\ + a^{n-2}(b+c)^{n-2}(ab+c) + \ldots + a(b+c)(ab+c)^{n-2} + (ab+c)^{n-1}]. \end{gathered}$$

Itt a vizsgált esetben $c(a-1)$ pozitív, a zárójel $j$-edik tagjában pedig $a^j$ a bal oldalon 1-gyel van szorozva, a jobb oldalon viszont

$$ab+c > b+c > 1$$

folytán 1-nél nagyobb számmal. Az utolsó egyenlőtlenség tehát a vizsgált esetekben szigorú egyenlőtlenséggel helyes.

Csupa ekvivalens átalakítást végeztünk, tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség is szigorú egyenlőtlenséggel érvényes, kivéve, ha $n=1$, továbbá ha $a=1$. Ezzel az előző megoldásban is nyert, valamivel élesített állítást nyertük.

*Megjegyzések:* 1.Figyeljük meg, hogy mind a nevező pozitív voltának a belátásánál, mind az (1) egyenlőtlenség bizonyításánál csak annyit használtunk, hogy $b+c \geq 1$, $b>0$, így elég lett volna csak ennyit tenni fel $b \geq 1$ helyett.

2. A (2) egyenlőtlenséget beláthatjuk úgy is, hogy a jobb oldalt a binomiális tétel szerint kifejtjük és a $b$ egyenlő hatványait tartalmazó tagokat összevonjuk. Ekkor a legmagasabbfokú tag kiesik, a következő

$$na^{n-1}b^{n-1}(a-1)c,$$

a többiben pozitív tényezők $a^k - 1$-gyel vannak szorozva ($k = 2, \ldots, n$), ami pozitív.

A bal oldalt a fenti módon alakítva szorzattá $(a-1)c$ szorzója egy $n$-tagú összeg, aminek a tagjai $a$-nak $n$-nél kisebb kitevőjű hatványai, és így nem nagyobbak $a^{n-1}$-nél, tehát $a^{n-1}b^{n-1}$-nél sem. Az egyenlőtlenség tehát teljesül.

**III. megoldás.** A feladat annak a belátását kívánja, hogy a

$$P(x) = x^n - \frac{(bx+c)^n - c}{(b+c)^n - c}$$

polinom olyan függvényt állít elő, amelyik nemnegatív, ha $x$ értéke legalább 1.

Ha $n = 1$, akkor a 0 polinommal van dolgunk, hacsak $b \neq 0$.

Ha $n \geq 2$, akkor $P(1) = 0$. Így az állítás bizonyításához elég azt megmutatni, hogy a függvény növekszik, $x \geq 1$, ehhez pedig azt, hogy a deriváltja pozitív ezekre az értékekre. A derivált

$$P'(x) = n\left(x^{n-1} - \frac{b(bx+c)^{n-1}}{(b+c)^n - c}\right) = \frac{n(x^{n-1}(b+c)^n - cx^{n-1} - b(bx+c)^{n-1})}{(b+c)^n - c}.$$

A nevezőre a binomiális tételt alkalmazva

$$\begin{aligned}(b+c)^n - c &= b^n + nb^{n-1}c + \ldots + c^n - c > b^n + nb^{n-1}c - c = \\ &= b^n + (nb^{n-1} - 1)c > b^n > 0.\end{aligned}$$

A számlálót így írhatjuk:

$$n\left(b\left[(bx+cx)^{n-1} - (bx+c)^{n-1}\right] + cx^{n-1}\left[(b+c)^{n-1} - 1)\right]\right).$$

Itt, mivel $n \geq 2,\ x \geq 1$ és $b + c > 1$,

$$bx + cx \geq bx + c \geq b + c > 1,$$

tehát az első különbség nemnegatív, a második pozitív, és így a számláló is pozitív, tehát $P'$ is, és ezt akartuk belátni.