I. megoldás: Az alapgondolat az, hogy egy G gyereket különválasztva, az azonos számú fejet tartalmazó kimenetelekből annyit, amennyit lehet, egyenletesen szétosztunk a többi gyerek közt, majd a fennmaradó sorozatokat G-nek adjuk. Ezután elég p-t úgy választani meg, hogy G nyerési esélye $1/100$ legyen, mivel a többi között egyenletesen oszlik meg a maradó $99/100$ valószínűség. Azt kell bizonyítani, hogy alkalmas k esetén ez lehetséges.

Száz gyerek esetén ez kiegészíthető azzal a gondolattal, hogy elég a feladatot száz helyett tízre megoldani. Ha ugyanis tíz gyerek esetén van alkalmas p, k és a kimenetelek egy alkalmas szétosztása, akkor a száz gyereket tízes csoportokba osztjuk, és először egy csoportot sorsolunk ki módszerünkkel, majd a csoport tagjai közt sorsoljuk ki az ajándékot.

Jegyezzük még meg, hogy ha valaki a „fej"-et tekintené „írás"-nak, természetesen akkor is megfelelő maradna az érme, ami azt jelenti, hogy egy p értékkel együtt $1-p$ is megoldása a feladatnak. Ez azt sugallja, hogy kényelmesebb p-t $\frac{1}{2}-r$ alakban keresni; így $1-p=\frac{1}{2}+r$.

Próbálkozzunk kilenc dobással. Ekkor a 0, 1, …, 9 fejet tartalmazó dobássorozatok száma sorra 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1. Ezekből az első 9 gyerek közt szétosztva amennyit lehet, csak a 0, a 3, a 6 és a 9 fejet tartalmazó sorozatokból marad a tizedik gyereknek rendre 1, 3, 3, 1. Egy-egy ilyen dobássorozat rendre $\left(\frac{1}{2}+r\right)^9$, $\left(\frac{1}{2}+r\right)^6\left(\frac{1}{2}-r\right)^3$, $\left(\frac{1}{2}+r\right)^3\left(\frac{1}{2}-r\right)^6$, $\left(\frac{1}{2}-r\right)^9$ valószínűséggel következik be. Így a következő egyenletet kapjuk:

$$\left(\frac{1}{2}-r\right)^9+3\left(\frac{1}{2}-r\right)^6\left(\frac{1}{2}+r\right)^3+3\left(\frac{1}{2}-r\right)^3\left(\frac{1}{2}+r\right)^6+\left(\frac{1}{2}+r\right)^9=\frac{1}{10}.$$

A bal oldalon

$$\left(\frac{1}{2}-r\right)^3+\left(\frac{1}{2}+r\right)^3=\frac{1}{4}+3r^2$$

köbe áll, így az egyenlet pozitív gyökét keresve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{4}+3r^2=\frac{1}{\sqrt[3]{10}},\qquad r=\sqrt{(4-\sqrt[3]{10})/12\sqrt[3]{10}}.$$

Innen – 6 értékes tizedesjeggyel számolva – azt kapjuk, hogy a feladat 10 gyerek esetén $k=9$, $p=0{,}232\,818$ választással megoldható.

Megjegyzések: 1. Az első kilenc gyerek egyenként 56 kimenetel esetén nyer, a tizedik összesen 8 esetben, az ezek valamelyike bekövetkezésének a valószínűsége lesz mindegyikük számára egyenlő.

2. A feladat száz gyerek esetén kérdezi az alkalmas dobásszámot és valószínűséget. Erre úgy felelhetünk, hogy mindegyik tízes csoportban előre kiosztjuk azokat a kimeneteleket is, amelyekkel a második fordulóban nyernek, amennyiben az első fordulóból az ő csoportjuk jut tovább. Az egyes gyerekek nyerő kimenetelsorozatai most már úgy adódnak, hogy az első sorozat minden kimeneteléhez hozzáírjuk a második fordulóban rájuk kedvező kimenetelek mindegyikét. Így száz gyerek esetére p változatlan, $k=18$, és lesz, akire $56\cdot 56=3136$ kimenetel jut, lesz akire $8\cdot 56=448$, egy gyerekre pedig mindössze $8\cdot 8=64$.

II. megoldás: Megmutatjuk, hogy a feladat 100 helyett tetszés szerinti n-re megoldható a fenti módszerrel. Hagyjuk k értékét egyelőre határozatlanul. A j fejet tartalmazó sorozatokból az első $n-1$ gyerek mindegyikének ugyanannyit adva, jelöljük c_j-vel az n-edik gyereknek maradó sorozatok számát. Nyilván $c_0=c_k=1$. A többi indexre $0\leqq c_j\leqq n-2$. Mivel egy ilyen sorozat bekövetkezésének a valószínűsége $p^j(1-p)^{k-j}$, így a következő egyenletre jutunk:

$$p^k+\sum_{j=1}^{k-1}c_jp^j(1-p)^{k-j}+(1-p)^k=\frac{1}{n}.$$

Belátjuk, hogy ha k elég nagy, akkor az egyenletnek van 0 és 1 közé eső megoldása. A bal oldal p-nek az egész számegyenesen értelmezett és folytonos $f(p)$ függvényét állítja elő, így elég belátni, hogy van olyan hely, ahol $1/n$-nél nagyobb értéket vesz fel, és olyan is, ahol kisebbet, mert folytonos függvény a két hely között felvesz a két érték közötti minden értéket.

$$f(1)=1>\frac{1}{n}.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(2+\sum_{j=1}^{k-1}c_j\right)\leq\left(\frac{1}{2}\right)^k[2+(k-1)(n-2)]\leq\left(\frac{1}{2}\right)^k(k-1)(n-1),$$

ha k legalább 3. Létezik tehát k-hoz megfelelő p, ha az utolsó kifejezés nem nagyobb, mint $1/n$, azaz

$$n(n-1)\leqq\frac{2^k}{k-1}.$$

A jobb oldali kifejezés k növekedtével minden határon túl nő, tehát minden n-hez választható alkalmas k és p érték.

$$n = 100 \quad \text{esetén} \quad 2^{18}/17 = 262\,144/17 > 15\,420 > 9900,$$

tehát választható p úgy, hogy 18 dobásból álló sorozattal igazságosan ki lehessen sorsolni az ajándékot.

Megjegyzés. Csak véletlen egyezés, hogy az I. megoldás szerint is 18 feldobással történhet a sorsolás. A II. megoldásnál a c_j együtthatók kiszámításával belátható, hogy már 16 dobásból álló sorozathoz is van alkalmas p érték.