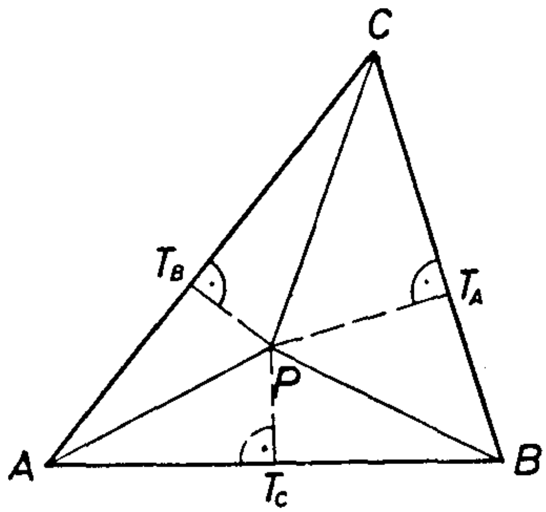
I. megoldás: A megoldást a következő megjegyzésre építjük. Egy háromszög egy csúcsát a szemközti oldal egy pontjával összekötő szakaszhoz egyértelműen tartozik egy arányszám, amelyikre igaz, hogy egy pont akkor és csak akkor pontja a szakasznak, ha a pont és a szakasszal közös csúcsból induló oldalak távolságainak az aránya az adott érték.



1. ábra

Ha az ABC háromszög egy P pontjának merőleges vetülete a BC, CA és AB oldalon rendre T_A, T_B és T_C (*1. ábra*), akkor az AP, BP, CP egyenesekhez (ill. a háromszögbe eső szakaszaikhoz) tartozó arányok

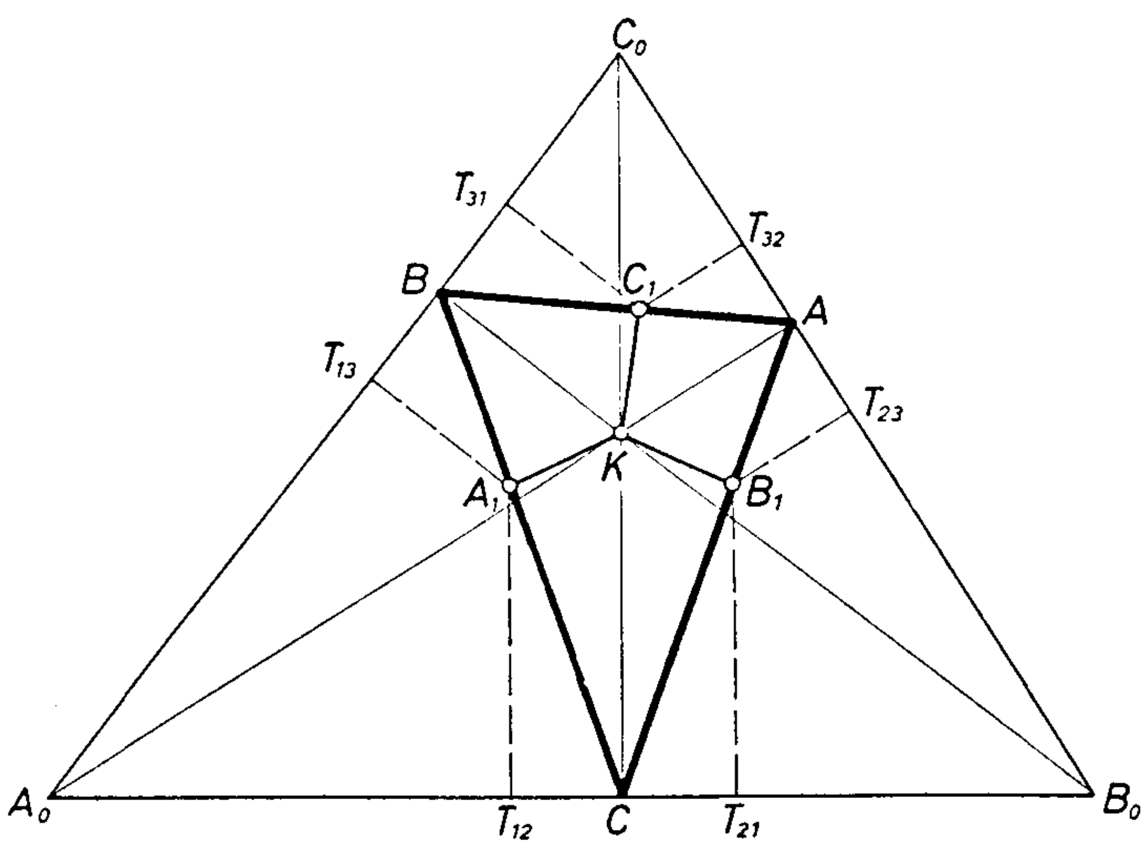
$$r_A = PT_B : PT_C, \quad r_B = PT_C : PT_A, \quad r_C = PT_A : PT_B,$$

és így

(2) $$r_A r_B r_C = 1.$$

Ha fordítva, P egy az A csúcson és egy a B csúcson átmenő egyenes metszéspontja, akkor a két egyeneshez tartozó arány a fenti r_A és r_B érték. Ha fennáll (2), akkor r_C is a fenti érték, s így a C ponton átmenő egyenes is átmegy P-n.

Más szóval, *ha az A,B, C csúcson átmenő egy-egy egyenesszakaszhoz tartozó arány* r_A, r_B, r_C, *akkor a szakaszok akkor és csak akkor mennek át egy ponton, ha teljesül* (2).



2. ábra

A feladatra térve A_0, B_0, C_0 a megfelelő külső szögfelezők metszéspontja, így az A, B, C csúcsok az $A_0B_0C_0$ háromszög oldalaira esnek (*2. ábra*). Jelöljük az ABC háromszög szögeit a szokásos módon α, β, γ-val; A_1 merőleges vetületét az A_0B_0, A_0C_0 oldalon T_{12}-vel, illetőleg T_{13}-mal, és megfelelően a másik két pont vetületeit, amint az ábra mutatja. Ekkor az A_0A_1 egyenesre vonatkozó arány az $A_0B_0C_0$ háromszögben

$$r_a = \frac{A_1T_{12}}{A_1T_{13}} = \frac{A_1C \sin BCA_0}{A_1B \sin CBA_0} = \frac{A_1C \cos\frac{\gamma}{2}}{A_1B \cos\frac{\beta}{2}}.$$

Hasonlóan

$$r_B = \frac{B_1A \cos\frac{\alpha}{2}}{B_1C \cos\frac{\gamma}{2}}, \qquad r_C = \frac{C_1B \cos\frac{\beta}{2}}{C_1A \cos\frac{\alpha}{2}},$$

és a három arány szorzata

$$\frac{A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B}{A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A}.$$

Tudjuk azonban, hogy a háromszög egy szögének a felezője a szemközti oldalt olyan szakaszokra osztja, amelyeknek az aránya megegyezik a mellettük fekvő oldalak arányával. Ezt egymás után CKB, AKC, majd a BKA háromszögekre alkalmazva.

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{CK}{BK}, \qquad \frac{B_1A}{B_1C} = \frac{AK}{CK}, \qquad \frac{C_1B}{C_1A} = \frac{BK}{AK}.$$

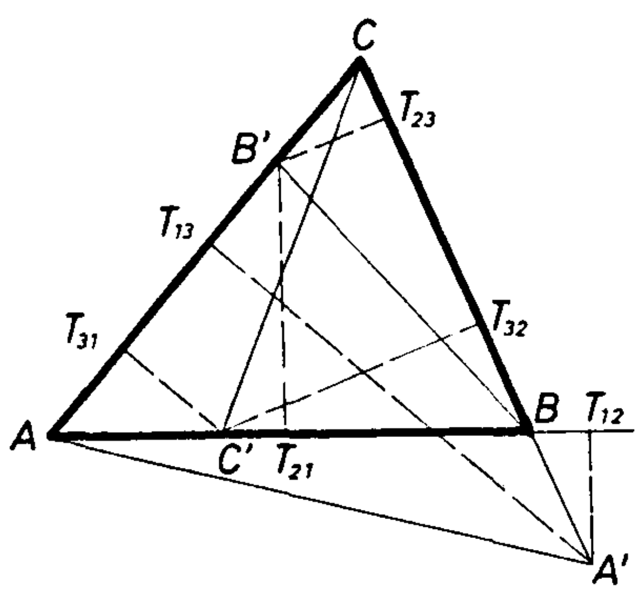
Ezek figyelembevételével azt kapjuk, hogy a fenti szorzat értéke 1, tehát az előrebocsátott megjegyzés értelmében a három egyenes egy ponton megy keresztül, és ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzések. 1. A K pontról csak annyit használtunk fel, hogy az ABC háromszögben van, így a feladat állítása a háromszög bármely K pontjára igaz.

2. A bevezető megjegyzésben a háromszög pontjaira szorítkoztunk. Ettől a megszorítástól azonban megszabadulhatunk, ha a háromszög oldalaitól mért távolságot előjelesen értjük: pozitívnak tekintjük azokra a pontokra, amelyek az oldalnak a háromszöget tartalmazó partján vannak, és negatívnak a másik félsík pontjaira. Ekkor csak a háromszög oldalegyeneseit célszerű kizárni.

3. Megvizsgáljuk most a kérdést ennek megfelelően tekintetbe véve az egész síkot. Legyen az ABC háromszög BC oldalának egy pontja A', merőleges vetülete az AB és AC oldalon T_{12} és T_{13} (*3. ábra*). Ekkor – a háromszög szögeit a szokásos módon jelölve – az AA' egyenest jellemző arány

$$r_A = \frac{A'T_{12}}{A'T_{13}} = \frac{BA' \sin\beta}{A'C \sin\gamma}.$$



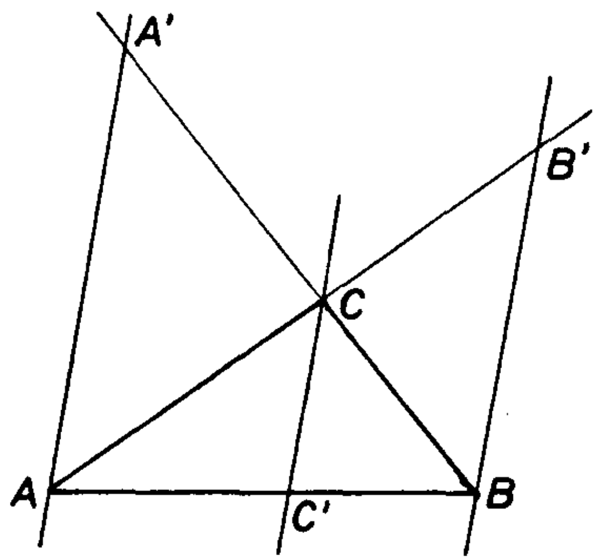
3. ábra

Ha B' és C' a CA, illetőleg az AB oldal egy-egy pontja, és felírjuk hasonló módon a BB' és a CC' egyenesre vonatkozó r_B és r_C arányt is, akkor a jobb oldalak szorzatában a számlálóban is, a nevezőben is ugyanaz a szinusz-szorzat lép fel, így azzal egyszerűsíthetünk. Azt kapjuk tehát, hogy a (2) bal oldalán álló szorzat a következővel egyenlő:

$$\frac{BA' \cdot CB' \cdot AC'}{A'C \cdot B'A \cdot C'B}. \tag{3}$$

Az is látható, hogy a felírt arányegyenlőségek előjelet tekintve is helyesek maradnak, ha az oldalegyeneseken egy-egy irányt pozitívnak, az ellentéteset negatívnak tekintve előjeles szakaszokkal számolunk, és az egyenesektől mért távolságot is előjelezve értjük a korábban mondott módon. Irányítsuk az oldalegyeneseket például a háromszög óramutatóval ellentétes irányú körüljárásának megfelelően.

Az továbbra is fennáll, hogy ha az AA', BB', CC' egyenes egy ponton megy keresztül, akkor a (2) szorzat értéke, és így a (3) arányé is 1. A megfordítás helyességének igazolásánál a háromszögben futó két szakasz metszéspontjából indultunk ki. Most azonban felléphetnek párhuzamos egyenesek is.



4. ábra

Ha a három egyenes párhuzamos, válasszuk a betűzést úgy, hogy a C csúcs a másik kettőn át húzott párhuzamosok közé essék (*4. ábra*). Ekkor alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét az ABA' és a BAB' szögeket átmetsző párhuzamosokra:

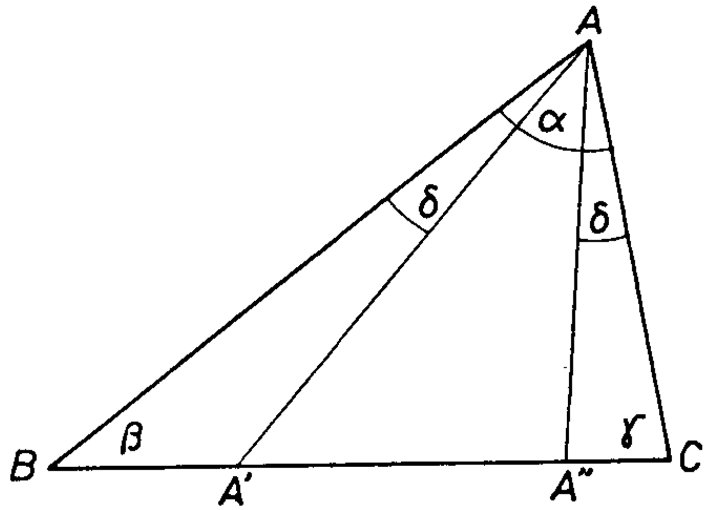
$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{BA}{AC'}, \qquad \frac{CB'}{B'A} = \frac{C'B}{BA}.$$

Ezeket a (3) törtbe helyettesítve kapjuk, hogy annak az értéke akkor is 1, ha a három egyenes párhuzamos.

Megfordítva, ha AA' és BB' párhuzamos, akkor CC' nem metszheti őket, mert ha metszené, akkor korábbi meggondolásunk szerint BB' és CC' metszéspontján kellene átmennie AA'-nek is.

Azt kaptuk tehát, hogy *véve az ABC háromszög BC, CA, AB oldalegyenesének egy-egy, a csúcsoktól különböző A', B', C' pontját, az AA', BB' és CC' egyenesek egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak akkor és csak akkor, ha a* (3) *arány értéke* 1. Ez Ceva tétele. Ezt a versenyzők nagy része ismerte és felhasználta megoldásában.

4. Többen ismerték és felhasználták azt is, hogy *ha a háromszög egy-egy csúcsán átmenő három egyenes egy ponton megy keresztül, vagy párhuzamosak az egyenesek, és mindegyiket tükrözzük a megfelelő szögfelezőre, akkor a tükrözött egyenesek is vagy egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak.*



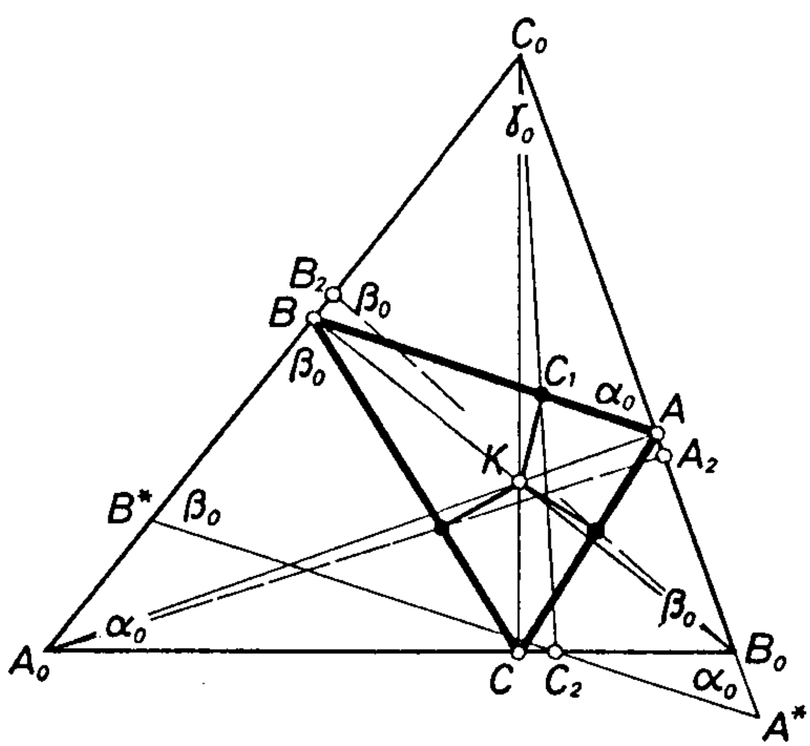
5. ábra

Valóban, legyen A' a BC egyenes egy pontja, és messe az AA' egyenesnek az A csúcsból induló szögfelezőre vonatkozó tükörképe a BC egyenest az A'' pontban. A $BAA'\sphericalangle = \delta$ jelöléssel, mivel a szögfelezőre tükrözünk, $CAA''\sphericalangle = \delta$ (*5. ábra*). Felhasználva a szinusztételt az $AA'B$, $AA'C$, $AA''B$, $AA''C$ háromszögekre

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{BA'/A'A}{A'C/A'A} = \frac{\sin\delta/\sin\beta}{\sin(\alpha-\delta)/\sin\gamma} = \frac{\sin\delta\sin\gamma}{\sin(\alpha-\delta)\sin\beta},$$
$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{BA''/A''A}{A''C/A''A} = \frac{\sin(\alpha-\delta)/\sin\beta}{\sin\delta/\sin\gamma} = \frac{\sin(\alpha-\delta)\sin\gamma}{\sin\delta\sin\beta} = \frac{A'C\sin^2\gamma}{BA'\sin^2\beta}.$$

Felírva a megfelelő arányokat a BB' és a CC' tükörképének metszéspontjaként keletkező B'' és C'' pontokra is és összeszorozva őket, a számlálóban is, a nevezőben is a háromszög három szöge szinusza négyzetének szorzata keletkezik, így ezzel egyszerűsíthetünk. Azt kapjuk tehát, hogy a kétvesszős pontokra felírt (3)-nak megfelelő kifejezés a vesszős pontokra felírtnak a reciprok értéke. Így Ceva tételéből következik a kimondott állítás helyessége.

II. megoldás: Jelöljük az $A_0B_0C_0$ háromszög szögeit rendre α_0, β_0, γ_0-val; az A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 egyenesnek és az $A_0B_0C_0$ háromszög szemközti oldalának a metszéspontját A_2, B_2, C_2-vel; húzzunk továbbá C_2-n át párhuzamost a BA egyenessel, messe ez a C_0A_0, C_0B_0 egyenest a $B^\star$, illetőleg $A^\star$ pontban *(6. ábra)*.



6. ábra

A háromszöghöz hozzáírt körök középpontjai a háromszög két-két külső és egy belső szögfelezőjének a metszéspontjai, továbbá az egy csúcsból induló belső és külső szögfelező merőleges egymásra, így az A, B, C csúcsok az $A_0B_0C_0$ háromszög oldalain feküsznek, a háromszög magasságainak talppontjai. Ennek folytán A_0BAB_0 húrnégyszög, tehát

$$C_0BA\sphericalangle = \beta_0, \qquad C_0AB\sphericalangle = \alpha_0;$$

a szerkesztés szerint pedig

$$C_0A^\star B^\star\sphericalangle = C_0AB\sphericalangle = \alpha_0, \qquad C_0B^\star A^\star\sphericalangle = C_0BA\sphericalangle = \beta_0.$$

Eszerint $A_0B^\star B_0A^\star$ húrnégyszög, mert $B^\star B_0$ az A_0 és az $A^\star$ pontból ugyanakkora szögben látszik. Ekkor a C_2-n átmenő szelők szeleteinek szorzata egyenlő:

$$A_0C_2\cdot C_2B_0 = B^\star C_2\cdot C_2A^\star.$$

Ez átrendezhető így:

$$\frac{A_0C_2}{C_2B_0} = \frac{B^\star C_2}{C_2A^\star}\left(\frac{C_2A^\star}{C_2B_0}\right)^2.$$

A jobb oldalt átalakítjuk. A párhuzamos szelők tétele, továbbá a szögfelezőre vonatkozó osztásarányi tétel alapján

$$\frac{B^\star C_2}{C_2A^\star} = \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BK}{KA}.$$

A második tényezőben az alap így alakítható át, a szinusztételt először az $A^\star B_0C_2$ háromszögre, majd ellenkező irányban az $A_0B_0C_0$ háromszögre alkalmazva:

$$\frac{C_2A^\star}{C_2B_0} = \frac{\sin(180^\circ-\beta_0)}{\sin\alpha_0} = \frac{\sin\beta_0}{\sin\alpha_0} = \frac{C_0A_0}{C_0B_0}.$$

Ezek szerint

$$\frac{A_0C_2}{C_2B_0} = \frac{KB}{KA}\left(\frac{C_0A_0}{C_0B_0}\right)^2.$$

Írjuk fel a megfelelő összefüggéseket A_2-re és B_2-re is:

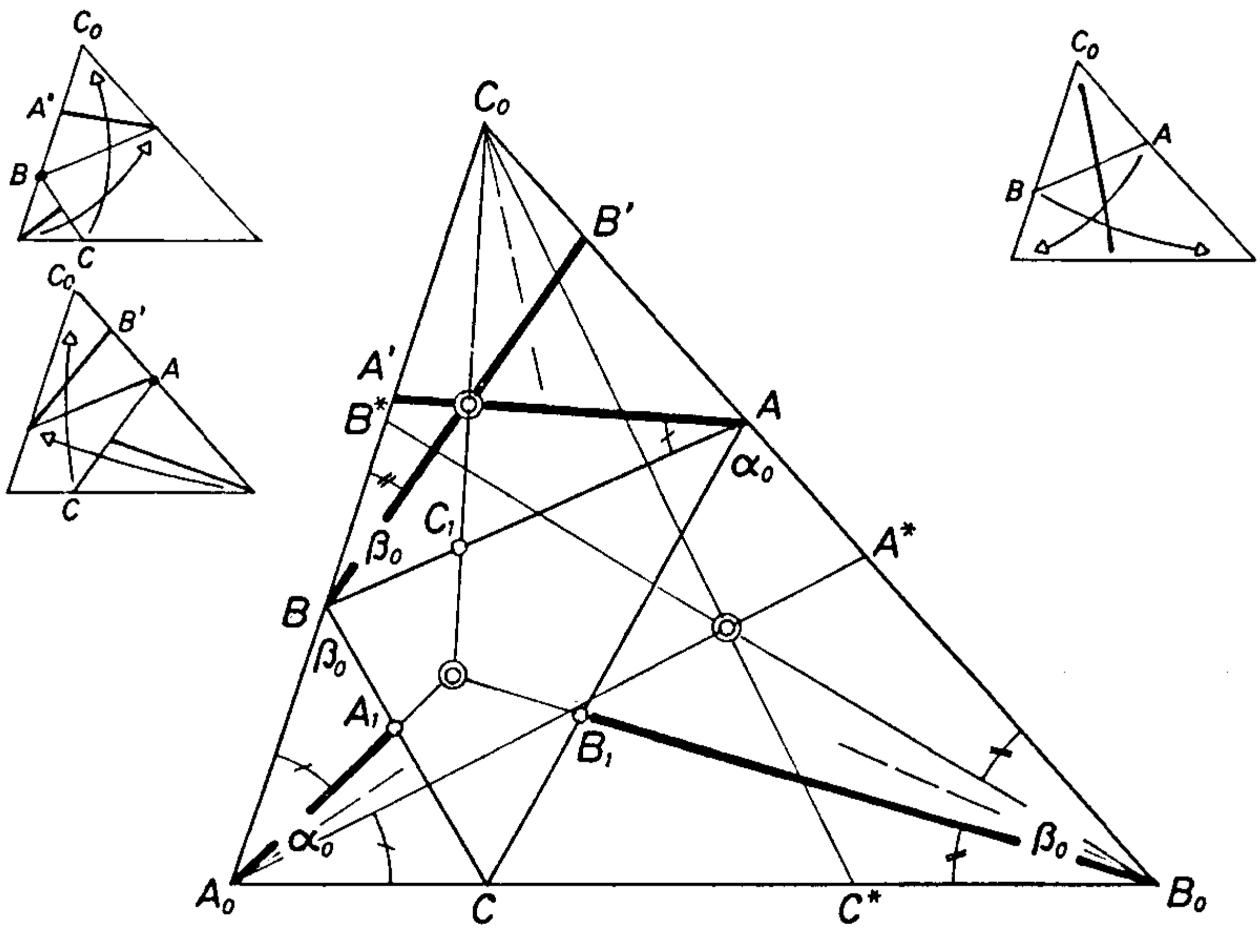
$$\frac{B_0A_2}{A_2C_0} = \frac{KC}{KB}\left(\frac{A_0B_0}{A_0C_0}\right)^2, \qquad \frac{C_0B_2}{B_2A_0} = \frac{KA}{KC}\left(\frac{B_0C_0}{B_0A_0}\right)^2.$$

A három egyenlőség megfelelő oldalait összeszorozva a jobb oldalon 1-et kapunk, tehát

$$\frac{A_0C_2}{C_2B_0}\cdot\frac{B_0A_2}{A_2C_0}\cdot\frac{C_0B_2}{B_2A_0} = 1.$$

Mivel A_1, B_1, C_1 az ABC háromszög megfelelő oldalának belső pontja, így az A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 egyenesek nem lehetnek párhuzamosak, tehát Ceva tétele szerint egy ponton mennek keresztül.

III. megoldás: Az előző megoldás jelöléseit használva az ott követett gondolatmenet ismétlésével kapjuk, hogy $B_0AC\sphericalangle = \alpha_0$ és $A_0BC\sphericalangle = \beta_0$. Így az A_0BC, AB_0C, ABC_0 és $A_0B_0C_0$ háromszög hasonló. Az elsőt és a másodikat a harmadikba egy B, illetőleg A körüli forgatás és ugyanezen középpontú alkalmas hasonlósági transzformáció viszi át, a harmadikat a negyedikbe pedig egy tükrözés a C_0-ból induló (belső) szögfelezőre és C_0 középpontú hasonlósági transzformáció. Mindezek a transzformációk a szakaszok arányát és a szögek nagyságát változatlanul hagyják.



7. ábra

Vigye át az első és a második transzformáció A_0A_1-et és B_0B_1-et AA'-be, illetőleg BB'-be *(7. ábra).* Ekkor

$$\frac{BA'}{A'C_0} = \frac{BA_1}{A_1C}, \qquad \frac{C_0B'}{B'A} = \frac{CB_1}{B_1A}.$$

A megfelelő oldalakat összeszorozva és szorozva még mindkét oldalt az AC_1/C_1B aránnyal, a jobb oldalon keletkező tört a szögfelezőre vonatkozó osztásarányi tétel szerint 1 lesz, ez pedig Ceva tétele szerint azt jelenti, hogy az AA', BB' és C_0C_1 egyenesek egy ponton mennek keresztül.

A föntebb említett harmadik transzformáció ezeket az egyeneseket az ugyancsak egy ponton átmenő $A_0A^\star$, $B_0B^\star$, $C_0C^\star$ egyenesekbe viszi át. Ezek közül az utolsó egyenes a C_0C_1 egyenes tükörképe a C_0-ból induló szögfelezőre. Hasonló igaz azonban a másik két egyenesre is. Ugyanis a transzformáció például a BAA' szöget a $B_0A_0A^\star$ szögbe viszi át, viszont az első transzformáció révén az előbbi szögbe a $BA_0A_1\sphericalangle = C_0A_0A_1\sphericalangle$ megy át, ami éppen azt jelenti, hogy A_0A_1 és $A_0A^\star$ egymás tükörképe az A_0-ból induló szögfelezőre nézve. Hasonlóan okoskodhatunk a harmadik egyenes esetében is. Ekkor azonban A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 is egy ponton megy keresztül, mint egy ponton átmenő egyeneseknek a megfelelő szögfelezőkre vonatkozó tükörképei.