I. megoldás. $M=1$ természetesen megfelel, mivel k csak 1 lehet. Nagyobb M-ekre nézzük meg a $k=2$ választást. Tudjuk, hogy egy szám 9-cel osztva ugyanannyi maradékot ad, mint a számjegyeinek az összege. Így

$$9|M-S(M), \quad \text{és} \quad 9|2M-S(2M),$$

amiből, különbségüket képezve,

$$9|(2M-S(2M)-(M-S(M))=M-S(2M)+S(M)=M.$$

A feladat feltétele tehát az 1-en kívül csak 9-cel osztható számokra teljesülhet.

Tegyük fel, hogy M egy n-jegyű szám, amelyre teljesül a feladat feltétele:

$$10^{n-1}\leqq M<10^n,$$

és első jegye $a(\geqq 1)$, $M=a10^{n-1}+A$, ahol A legfeljebb $(n-1)$ jegyű. (Lehet 0 is; ha $n=1$, akkor csak az lehet.) Mivel M osztható 9-cel, így nagyobb 10^{n-1}-nél, tehát k választható $10^{n-1}+1$-nek. Ekkor

$$kM=(10^{n-1}+1)M=10^{n-1}(M+a)+A.$$

Az első tag $(n-1)$ darab 0-val végződik, a második legfeljebb $(n-1)$-jegyű, tehát az összeadásnál minden jegyét 0-hoz kell adni. A számjegyösszeg tehát a két tag jegyösszegének az összege.

Az első tag jegyösszegét a végén álló nullák nem befolyásolják, így annak jegyösszege $S(M+a)$. A jegyei azonosak M jegyeivel, a kivételével, így $S(A)=S(M)-a$. A feladat feltétele tehát akkor teljesül, ha $S(M+A)=a$.

Ha $M+a$ is n-jegyű, akkor első jegye vagy a, és ekkor van még 0-tól különböző jegye, mivel nagyobb M-nél, vagy pedig $a+1$ az első jegye. Jegyösszege mindkét esetben nagyobb a-nál. Ha $M+a$ $(n+1)$- jegyű, tehát legalább 10^n, akkor

$$10^n>M\geqq 10^n-a\geqq 10^n-9,$$

ebbe a számközbe pedig csak egy 9-cel osztható szám esik: 10^n-1, vagyis az n darab kilencessel írt szám. (n tetszőleges pozitív egész szám.)

Megmutatjuk, hogy az ilyen alakú számok megfelelnek. Legyen $M=10^n-1$ és $2\leqq k\leqq M$. Ekkor

$$kM=(k-1)10^n+10^n-k=(k-1)10^n+(10^n-1)-(k-1).$$

Itt az első tag n darab 0-val végződik, a második az n darab kilencessel írt szám, a kivonandó pedig legfeljebb n-jegyű. Így a jegyösszeg ismét az első tag jegyösszegének és a különbség jegyösszegének az összege. Az első tag jegyösszege $S(k-1)$, a különbség képzésénél pedig $k-1$ minden jegyét 9-ből kell levonni, tehát átvitelre nem kerül sor. Így a különbség jegyösszege $9n-S(k-1)$. kM jegyösszege tehát $9n$, ami megegyezik $S(M)$-mel. Ezt akartuk belátni.

II. megoldás. Az előző megoldásból átvesszük azt, hogy csak 9-cel osztható számok jönnek szóba, és hogy az 1 és a 10^n-1 alakú számok megfelelnek. Ezekre támaszkodva látjuk be, hogy ezek már megadják az összes megfelelő számot.

Legyen M egy 1-nél nagyobb megfelelő szám. Legyen hozzá n az a pozitív egész, amelyre $(10^n-1)/9\leqq M<(10^{n+1}-1)/9$. Az alsó korlátot választva k-nak

$$S(kM)=S((M/9)(10^n-1)).$$

Itt $M/9<(10^{n+1}-1)/81<(10^n-1)$. Mivel (10^n-1)-re teljesül a feladat feltétele,

$$S\left(\frac{M}{9}(10^n-1\right)=S(10^n-1)=9n.$$

Ha M n-jegyű, akkor ez csak úgy egyezhet meg $S(M)$-mel, ha M az n darab kilencessel írt szám, 10^n-1. Ha M $(n+1)$-jegyű, akkor első jegye csak 1 lehet és a további jegyei közt kell 0-nak lennie, mert kisebb a csupa egyessel írt számnál. Ekkor azonban jegyösszege legfeljebb $1+9(n-1)<9n$ volna. A feltételnek tehát valóban csak a mondott számok felelnek meg.

Ez Fleiner Tamás megoldása.

Megjegyzések: 1. Ugyanígy adódik tetszés szerinti b alapú számrendszer esetén, hogy az 1 és a csupa $(b-1)$-es jeggyel írt számok a kívánt tulajdonságúak.

2. Láttuk, hogy a 9-cel nem osztható számok már $k=2$-re sem elégítik ki a megkívánt egyenlőséget. Nem látszik azonban könnyű kérdésnek, hogy egy 9-cel osztható számhoz melyik a legkisebb k, amelyiknél ez bekövetkezik. A II. megoldás valamivel nagyobb k-ra mutatja ezt meg, mint az I. Sok számhoz található, azonban annál is jóval kisebb „rossz” k érték. Már a 2 ilyen pl. 324-hez, a 3 a 126-hoz, a 4 a 117-hez, az 5 a 351-hez, a 6 a 189-hez, viszont 198-hoz az I. megoldás szolgáltatta 101 a legkisebb k érték. Nem nagyon látszik, hogy ez a legkisebb k érték a szám milyen tulajdonságaitól függ.