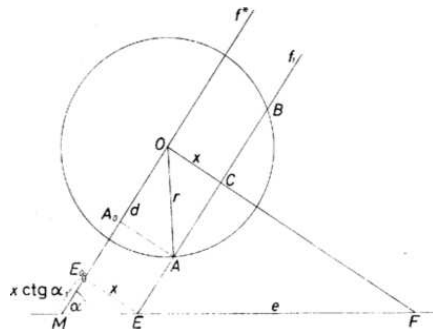


1. ábra

A következő jelöléseket fogjuk használni (lásd az 1. ábrát). A kör középpontja O, sugara r, az O-n át f-fel párhuzamosan húzott egyenes f^*, metszéspontja e-vel M, az e és f közti hegyes vagy derékszög α; egy f-fel párhuzamos f_1 egyenes metszéspontja e-vel E, a körrel A és B (E, A, B sorrendben); AB felezőpontja C, a CO egyenes metszéspontja e-vel, (ha létezik), F, $OC = x$, tekintsük pozitívnak, ha C az e és f közti hegyesszögű (illetőleg, ha merőlegesek az egyik) szögtartományban van, negatívnak, ha a másikban; végül $OM = d$.

I. megoldás. A feladatban szereplő szakaszokat kifejezzük a bevezetett mennyiségekkel. $AB = 2AC = 2\sqrt{r^2 - x^2}$. EA meghatározásához vetítsük E-t és A-t f^*-ra, vetületük legyen E_0, ill. A_0. Ekkor $A_0A = x$, ahol $|x| \leqq r$ és

$$EA = E_0A_0 = d - ME_0 - A_0O = d - x \text{ ctg } \alpha - \sqrt{r^2 - x^2}.$$

A keresett arány tehát

$$\frac{AB}{AE} = \frac{2\sqrt{r^2 - x^2}}{d - x \text{ ctg } \alpha - \sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2}{\dfrac{d - x \text{ ctg } \alpha}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 1}.$$

Ez akkor a legnagyobb, ha a nevezőben levő tört a legkisebb értékét veszi fel. Ez a tört pozitív, mert $d - x \text{ ctg } \alpha = E_0O = EC$ és e a körön kívül van, tehát ugyanott veszi fel legkisebb értékét, ahol a négyzete, $(d - x \text{ ctg } \alpha)^2/(r^2 - x^2)$.

Ha x r-hez, vagy $-r$-hez közeledik, akkor a tört felvesz tetszés szerint nagy értékeket, így legkisebb értékét a számköz belsejében veszi fel, az tehát helyi szélsőérték is, s így ott a tört deriváltja 0. A derivált nevezője pozitív az egész számközben. Számlálója

$$2(-ctg\ \alpha)(d - x \text{ ctg } \alpha)(r^2 - x^2) - (-2x)(d - x \text{ ctg } \alpha)^2 =$$
$$= 2(d - x \text{ ctg } \alpha)(dx - r^2 \text{ ctg } \alpha).$$

Láttuk, hogy az első zárójelben álló mennyiség pozitív, így a derivált a

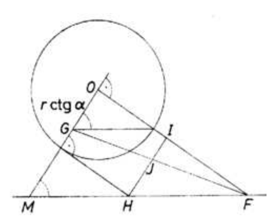
(1) $$dx_0 = r^2 \text{ ctg } \alpha$$

összefüggésnek eleget tevő helyen tűnik el. Itt negatív értékből megy át pozitívba, tehát a függvénynek itt minimuma van. (Ez egyébként abból is következik, hogy csak egy szélsőérték adódott, egy minimumhelynek viszont kell lennie.)

Többféleképpen is szerkeszthetjük x_0-t. Ha $x_0 = 0$ (azaz $\alpha = 90°$, e és f merőleges), akkor az O-n át e-re merőlegesen húzott egyenesre a legnagyobb a kérdéses arány (ez egyébként közvetlenül is világos). Ennek szerkesztése közismert.

Ha α hegyes szög, írjuk (1)-et ilyen alakban:

(2) $$\frac{x_0}{r} = \frac{r \text{ ctg } \alpha}{d}.$$

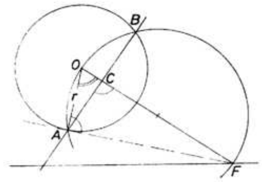


2. ábra

Messe az OF-nek a körrel való metszéspontján át e-vel párhuzamosan húzott egyenes f^*-ot G-ben (2. ábra). Ekkor $GO = r$ ctg α, (2) jobb oldala tehát a GO/MO aránnyal egyenlő. Ezt akarjuk úgy vetíteni, hogy a nevező r hosszúságú szakaszba menjen át. Messe az MO és a kör metszéspontján át MO-ra merőlegesen állított egyenes e-t H-ban, a H-ból OF-re bocsájtott merőleges utóbbit I-ben, végül FG és HI metszéspontja legyen J. Ekkor $HI = r$, és így a párhuzamos szelők tétele szerint $GO/MO = JI/HI = JI/r$. A keresett x_0 szakasz tehát JI. Ezt felmérve O-ból OF-re és végpontjában merőlegest állítva OF-re kapjuk a keresett egyenest.

Megjegyzések: 1. A szelő jellemzésére használhatjuk pl. az AOC szöget, vagy más paramétert is.

2. A (2) jobb oldalán álló törtet tg α-val bővítve az $x_0/r = r/d$ ctg α összefüggést kapjuk. Itt d tg $\alpha = OF$ (3. ábra), így a nyert egyenlőségből leolvasható, hogy az AOC és az FOA háromszög hasonló. Az O-nál levő szögük ugyanis közös és egy megfelelő oldalpárjuk aránya egyenlő. Az előbbi háromszög C-nél levő szöge derékszög, tehát az utóbbiban FA merőleges az OA körsugárra. A keresett szelő metszéspontjai a körrel tehát az F-ből húzott érintők érintési pontjai. Ezt nem nehéz közvetlenül belátni.

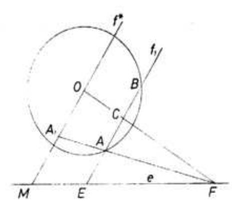


3. ábra

II. megoldás: Legyen α hegyesszög. Az f-fel párhuzamos érintőkre az AB/EA arány 0, aminél lehet nagyobb is. Akkor a legnagyobb, amikor az AC/EA arány, ez pedig akkor, amikor a reciproka a legkisebb. Azt még 1-gyel növelve az

$$\frac{EA}{AC} + 1 = \frac{EA + AC}{AC} = \frac{EC}{AC}$$

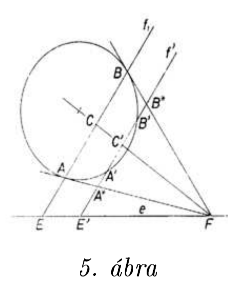
arány minimumát szolgáltató szelőt keressük.



4. ábra

FA és MO metszéspontját A_1-gyel jelölve $EC/AC = MO/A_1O$ (4. ábra). Itt a számláló nem függ a szelő helyzetétől, így az arány akkor a legkisebb, amikor a nevező a legnagyobb, ez pedig az F-ből húzott érintő érintési pontjára teljesül.

Az F-ből húzott érintők érintési pontját az OF átmérőjű kör metszi ki az adott körből.



5. ábra

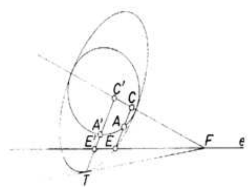
Legyen most f_1 ezeken a pontokon átmenő szelő, f' egy másik, és azon E', A', C' a megfelelő metszéspontok, A^* pedig az FA-val való metszéspont (5. ábra). Ekkor

$$E'A' > E'A^*, \quad A'C' < A^*C', \;\text{ tehát }\; A'C'/E'A' < A^*C'/E'C',$$

vagyis a feladatban kérdezett arány valóban a megszerkesztett egyenesen a legnagyobb.

Ha e és f merőleges, akkor f^*-ra lesz EB a lehető legnagyobb, EA pedig a legkisebb, tehát a vizsgált arány a legnagyobb. Ennek az egyenesnek a szerkesztése közismert.

Megjegyzések. 1. Okoskodhatunk a következő módon is. Tetszés szerinti f_1 szelőt véve, a kört egy OF tengelyű és EC/AC arányú merőleges affinitás olyan ellipszisbe viszi át, amelyiknek van közös pontja e-vel. Ha van az ellipszisnek pontja az e-nek a kört nem tartalmazó partján is, akkor az F-ből húzott egyik érintő is ezen az oldalon van, és annak az érintési pontját egy kisebb arányú affinitás viszi át e-re (6. ábra).



6. ábra

Az arány tehát akkor a legkisebb, ha az e-t érintő ellipszist kapjuk, vagyis e az F-ből a körhöz húzott érintő képe. Arra a szelőre lesz tehát a nyújtás aránya a legkisebb, s így a feladatban kérdezett arány a legnagyobb, amelyik az F -ből húzott érintő érintési pontján megy át. Ezen az úton oldotta meg a feladatot Újváry-Menyhárt Zoltán.

2. Gerlits Ferenc számítással oldotta meg a feladatot, de az analízis használata helyett csak a másodfokú egyenletekre vonatkozó ismeretekre támaszkodva.

III. megoldás. Az I. megoldásban láttuk, hogy azt az x értéket kell megkeresnünk, amelyikre a $\dfrac{(d-x\ \mathrm{ctg}\ \alpha)^2}{r^2-x^2}=c$ arány a legkisebb. Más szóval a legkisebb c-t, amelyikre a

$$(c+\mathrm{ctg}^2\ \alpha)x^2-(2d\ \mathrm{ctg}\ \alpha)x+d^2-cr^2=0$$

egyenletnek van megoldása, annak abszolút értéke r-nél kisebb és c pozitív. Az egyenletnek akkor van (valós) megoldása, ha nem negatív a diszkriminánsa. A diszkrimináns

$$4(d^2\ \mathrm{ctg}^2\ \alpha-(c+\mathrm{ctg}^2\ \alpha)(d^2-cr^2))=4c(cr^2-(d^2-r^2\mathrm{ctg}^2\ \alpha)).$$

Ez kell, hogy ne legyen negatív. Mivel c-nek pozitívnak kell lennie, tehát a második tényező sem lehet negatív. Innen

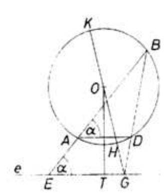
$$c\geqq(d^2-r^2\ \mathrm{ctg}^2\ \alpha)/r^2.$$

Ha ezt a kritikus értéket beírjuk az egyenletbe, az

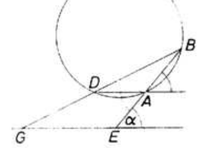
$$((d/r)x-r\ \mathrm{ctg}\ \alpha)^2=0$$

alakra hozható. Ez az I. megoldásban nyert, r-nél kisebb x_0 értéket szolgáltatja.

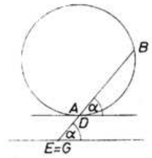
IV. megoldás. Húzzunk A-n át párhuzamost e-vel, messe ez a kört másodszor D-ben. Ha érintőt kapunk, akkor $D=A$ (7.a, b, c ábra).



7.a ábra



7.b ábra

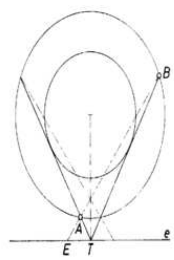


7.c ábra

Ekkor a rövidebb BD ívet α szögű (esetleg csúcs-) szögtartomány foglalja magába, így a BD húr hossza csak α-tól függ, az AB szelő helyzetétől nem. BD és e metszéspontját G-vel jelölve a párhuzamos szelők tétele szerint $AB/EA = DB/GD$. Ez tehát akkor a legnagyobb, ha GD a legkisebb, egyúttal, BD állandó volta miatt GB is, s így $GD \cdot GB$, ami G hatványa a körre, szintén a legkisebb. Ez a szorzat minden G-n átmenő szelőre ugyanakkora, így az O-n átmenőre is. Ennek a körbe eső húrja átmérő, független a G pont helyzetétől, így a hatvány az e egyenesnek a körhöz legközelebb eső pontjára, O-nak e-n való T merőleges vetületére lesz a legkisebb. Az ezt szolgáltató, f-fel párhuzamos egyenest kell tehát megszerkesztenünk.

Az egyenlő hosszúságú húrok egy O középpontú ($r \cos \alpha$ sugarú) kör érintői. Ehhez a körhöz megszerkesztjük T-ből a két érintőt. Mindkettőnek a T-től távolabbi metszéspontját a másik közelebbi metszéspontjával kötve össze, két egyenest kapunk (8. ábra), amelyek α nagyságú szöget zárnak be e-vel egyik, illetőleg másik irányban. Egyikük tehát párhuzamos f-fel. A követett gondolatmenet megfordításával látható, hogy ez valóban a keresett egyenes.

Ezt a megoldást Fleiner Tamás adta.



8. ábra

V. megoldás. Ismét deriváltat használunk, de kiszámítása helyett geometriai jelentéséből vonunk le következtetéseket.

Legyen α hegyesszög. Koordinátatengelyeknek válasszuk az O-n átmenő, f-re merőleges és a vele párhuzamos egyenest. Ekkor CA az $OC = x$ változónak azt a $-r \leqq x \leqq r$ számközön értelmezett g függvényét szemlélteti, amelyiknek a képe a tengely fölötti félkör, AE pedig ugyanezen a szakaszon azt a h függvényt, amelyre $g + h$ képe az e egyenesnek a szakasz feletti része. A g/h függvény legnagyobb értékét keressük.

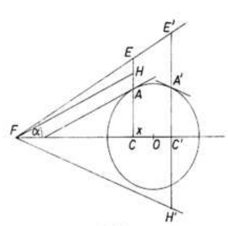
Ez a függvény értelmezve van az egész számközön, mivel e-nek nincs közös pontja a körrel, s így a nevező nem 0. A végpontokban a hányados értéke 0, máshol pozitív, így maximuma helyi maximum is, ott a derivált 0, s így annak számlálójára:

$$g'h - gh' = 0 \tag{3}$$

teljesül. Itt g' a kör A-ban húzott érintőjének az iránytangense, h' pedig a $(g+h)' = g' + h'$ összefüggésből kapható. Itt ugyanis a bal oldalon az e egyenes iránytangense, tg α áll, tehát

$$h' = \operatorname{tg} \alpha - g'.$$

Innen látjuk, hogy a két derivált nem lehet egyszerre 0, tehát (3) csak úgy teljesülhet, ha egyik sem 0.



9. ábra

Húzzunk F-ből párhuzamost az A-ban húzott érintővel (9. ábra), jelöljük CA-val való metszéspontját H-val. Ez a tartomány belsejében levő C pontokra mindig létezik. Ekkor $\operatorname{tg} \alpha = CE/FC$, az érintő iránytangense CH/FC (negatív, ha H a tengely alatt van), így $h' = CE/FC - CH/FC = HE/FC$ (negatív, ha H az e egyenes fölött van).

Írhatjuk (3)-at, mivel fennállása esetén a deriváltak nem tűnhetnek el, $g'h' = g/h$ alakban. A jobb oldali arány CA/AE-vel egyenlő, a bal oldalon álló pedig megállapításaink szerint a következővel:

$$\frac{\dfrac{CH}{FC}}{\dfrac{HE}{FC}} = \frac{CH}{HE}.$$

Rögzített C és E pontok mellett a CE egyenes különböző P pontjaira a CP/PE arány különböző, ha előjeles arányt nézünk, mint esetünkben. A (3) egyenlőség tehát csak akkor állhat fenn, ha $H = A$, vagyis az F-en át az A-beli érintővel párhuzamosan húzott egyenes átmegy A-n, azaz A az F-ből a körhöz húzott érintő érintési pontja. Ezzel először is azt kaptuk, hogy a törtnek egy szélsőértéke van, mivel pedig kell egy maximumának lennie, így ez a szélsőérték maximum. Azt is kaptuk, hogy ezt az F-ből a körhöz húzott érintő érintési pontján átmenő egyenes szolgáltatja.

Megjegyzés. A bizonyítás szellemes alapötlete Bodor András dolgozatában található. Számos, analízisbeli eszközöket használó megoldással ellentétben a megoldás geometriai tartalmát mutatja meg. Ez természetesen egyszerűbben nyerhető elemi úton, mint pl. a II. megoldásban láttuk.