**Megoldás.** 1. Ha a középső elem egy adott $b$ szám, akkor az első elem az $1, 2, \ldots, b-1$ számok valamelyike lehet, a harmadik pedig a $b+1, \ldots, n$ számok valamelyike. Az előbbiek száma $b-1$, az utóbbiaké $n-b$. A kettő közül a kisebbik – vagy közös értékük, ha a kettő egyenlő–, adja meg, hogy $b$ maximálisan hány hármasban léphet fel középső elemként.

Természetesen $2 \leqq b \leqq n-1$, és az elmondottak szerint a 2 és az $n-1$ egyszer, a 3 és az $n-2$ kétszer léphet fel maximálisan, és így tovább. Így a kiválasztható hármasok számára a következő felső korlátot nyertük: ha $n$ páros, $n=2k$ akkor

$$2 \cdot (1+2+\ldots+k-1) = k(k-1) = n(n-2)/4;$$

ha $n$ páratlan, $n = 2k+1$, akkor

$$2 \cdot (1+2+\ldots+k-1) + k = k^2 = \big((n-1)/2\big)^2.$$

2. Ennyi hármas ki is választható a feltételnek megfelelő módon minden esetben. Vegyük például az $\{a, b, a+b\}$ alakú hármasokat, ahol $1 \leqq a < b$ és $a+b \leqq n$. Itt a hármas bármelyik két eleme meghatározza a harmadikat, így két különböző hármasnak legfeljebb egy helyen lehet egyező eleme.

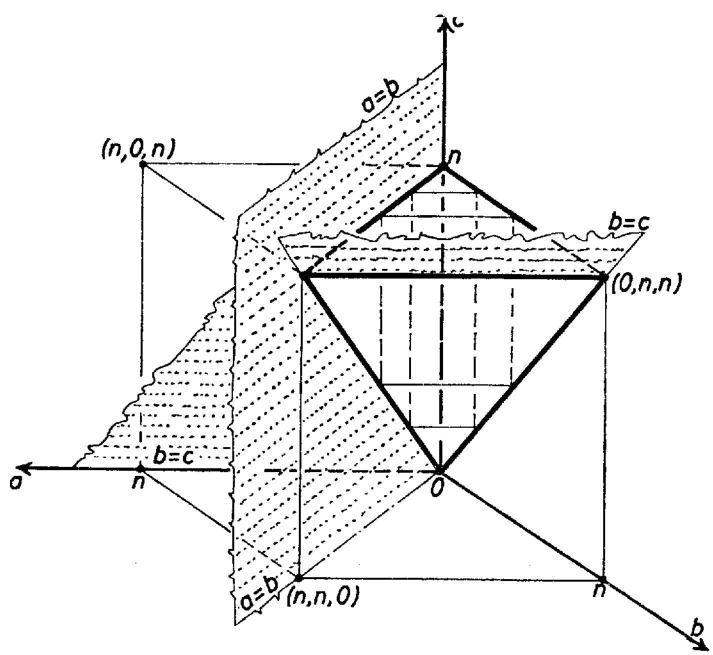
Az is látható, hogy ha $b \leqq n/2$, akkor első elemnek 1-től $b-1$-ig minden érték előfordul, mert $b$-hez adva még $n$-nél kevesebbet ad, ha pedig $b > n/2$, akkor harmadik elemként $b+1$-től (amikor $a=1$) $n$-ig minden érték előfordul, mert a hozzájuk tartozó első elemre $a = c-b < n-n/2 = n/2$, és ez kisebb $b$-nél. A kiválasztott hármasok száma tehát annyi, mint a felső korlátként kapott érték.

*Megjegyzések:* 1. A nyert eredmény írható az egészrész jelével egy formulában $\left[\big((n-1)/2\big)^2\right]$ alakban.

2. Más módokon is választhatunk ki maximális számú hármasokból álló rendszert. Ilyenek pl. az $\{a, a+d, n+1-d\}$ hármasok, ahol $1 \leqq d \leqq \dfrac{n-a}{2}$, vagy az $\{a, a+d, a+2d\}$ hármasok, ahol $1 \leqq d \leqq \dfrac{n-a}{2}$;

3. A megoldásban csak azt használtuk ki, hogy két hármas az első és második elemében, továbbá a második és harmadik elemében nem egyezhet meg. Akkor sem lehet tehát több hármast kiválasztani, ha azt megengedjük, hogy két hármas az első és harmadik elemében megegyezzék.

4. A megoldást szemléletessé tehetjük úgy, hogy a számhármasokat térbeli koordinátáknak tekintjük. Ekkor az első síknyolcadban keressük azokat az egész koordinátájú pontokat, amelyek az $n$ élhosszúságú kockában vannak, és az $a=b$ egyenletű átlós síknak a pozitív $b$-tengelyt, továbbá a $b=c$ egyenletűnek a pozitív $c$-tengelyt tartalmazó oldalára esnek (a határsíkot már kizárva); végül a koordinátaegyezések kizárására vonatkozó kikötés geometriailag azt jelenti, hogy a tengelyekkel párhuzamos egyeneseken csak egy-egy kiválasztott pont lehet.




*6. ábra*

A síkok a kockából egy tetraédert vágnak ki (6. ábra). Ebből kell az utolsó feltételnek is megfelelően maximális számú pontot kiválasztani. Az egy adott $b$ értékhez tartozó pontok a tetraéder egy téglalap alakú metszetébe eső egész koordinátájú pontok. Ezek közül nem választható ki több, mint ahány egész $c$ értékhez tartozó, $a$-tengellyel párhuzamos egyenes van a téglalapon, sem annál több, mint az egész $a$ értékhez tartozó, $c$ tengellyel párhuzamos egyenesek száma, vagyis nem választható ki több, mint a két szám kisebbike. Ez pedig a fent nyert becsléshez vezet.

5. Többen azzal vélték megoldani a feladatot, hogy megadták a hármasoknak egy rendszerét (történetesen a föntebb említettek valamelyikét) és azt mutatták meg, hogy ezekhez nem vehető hozzá további hármas a kikötések megsértése nélkül. Ebből azonban még nem következik, hogy a kiválasztott hármasok száma maximális. Az első 5 számból válogatva pl. az $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$ rendszer nem bővíthető, de tudjuk, hogy kiválasztható 4 hármas is úgy, hogy ne sértse meg az előírásokat.

Ezzel kapcsolatban felmerül egy probléma is. Az $1, 2, \ldots, n$ számok közül úgy akarunk kiválasztani a feladat feltételeinek megfelelő hármasokat, hogy további hármast már ne lehessen hozzávenni. Mi az ilyen rendszerek elemszámának a minimuma? Könnyű látni, hogy $n = 5$-re két hármas még nem zárhat ki minden továbbit, így a kérdezett minimum 3. Az előző megjegyzésben leírt szemléltetés segítségével sikerült $n = 6, 7, 8, 9$-re rendre 5, 7, 10, illetőleg 13 hármasból álló, nem bővíthető rendszert találni, de lehet, hogy ezek nem a minimális értékek. (A kiválasztható hármasok maximális száma ezekre az $n$ értékekre 6, 9, 12, illetőleg 16.)

Ha a feltételt a 3. megjegyzésben említett gyengébbel helyettesítjük, akkor már igaz, hogy a hármasok minden olyan rendszere, amelyik nem bővíthető, maximális elemszámú. Valóban, két különböző középsőelemű hármas nem zárja ki egymást, ha pedig azok közt, amelyek középső eleme ugyanaz a $b$ érték, és nem fordul elő $b \leqq \frac{n}{2}$ esetén valamilyen $a < b$ érték első elemként, illetőleg $b > n/2$ esetén valamilyen $b + 1$ és $n$ közti $c$ érték harmadik elemként, akkor van olyan $\{a, b, c\}$ hármas, amelyik hozzávehető a rendszerhez, mert az előbbi esetben a harmadik helyre, az utóbbiban az első helyre legalább annyi szám áll rendelkezésre, mint a másik helyre.