I. megoldás. Mindenki mindenkivel csak egyféle játékot játszik, hiszen mindenkinek $3n$ partnere van és összesen ennyi játszmában vesz részt.

Három embert összesen

$$\binom{3n+1}{3}$$

féleképpen lehet kiválasztani a társaságból. Számoljuk össze, hány olyan hármas lehet maximálisan, amelyiknek a tagjai legfeljebb kétféle játékot játszanak egymás közt! A társaság egy A tagja n emberrel pingpongozik, így $\binom{n}{2}$ olyan hármasban van benne, amelyiknek mind a két másik tagjával pingpongozik. Ugyanennyi olyan hármasban van benne, amelyikben mindkét partnerrel sakkozik, illetőleg amelyikben mindkettővel teniszezik, tehát $3 \cdot \binom{n}{2}$ olyan hármas van, amelyikben ő csak egyféle játékot játszik. Ez igaz a társaság bármelyik tagjára, tehát az olyan hármasok száma, amelyeknek tagjai legfeljebb kétféle játékot játszanak egymás közt, nem több, mint

$$3\binom{n}{2}(3n+1),$$

az olyan hármasokat ugyanis, ha vannak, amelyeken belül csak egyféle játékot játszanak, többször vettük számba. Az olyan hármasok száma tehát, amelyeken belül mind a három játékot játsszák, legalább

$$\binom{3n+1}{3} - 3\binom{n}{2}(3n+1) = \frac{(3n+1)3n(3n-1)}{6} - 3\frac{n(n-1)}{2} \cdot (3n+1) = 3n^2 + n.$$

A feladat állítása tehát igaz.

Megjegyzés. A bizonyítás alsó korlátot is adott a feladat követelményeit kielégítő hármasok számára, nem adott viszont eljárást ilyen hármasok kiválasztására, csak létezésüket bizonyítja.

II. megoldás. A feladat állításának helyességét indirekt úton bizonyítjuk. Legyen A a társaság egy tagja, $\mathcal{P}$ azoknak a csoportja, akik A-val pingpongoznak, $\mathcal{S}$ azoké, akik sakkoznak vele és $\mathcal{T}$ az A-val teniszezőké. Tegyük fel, hogy nincs a feladat állításának megfelelő hármas. Ekkor egy $\mathcal{P}$-beli és egy $\mathcal{S}$-beli nem teniszezhet, egy $\mathcal{S}$-beli és egy $\mathcal{T}$-beli nem pingpongozhat, egy $\mathcal{T}$-és egy $\mathcal{P}$-beli pedig nem sakkozhat, mert különben A-val megfelelő hármast alkotnának.

Megszámoljuk kétféleképpen azoknak a hármasoknak a számát, amelyekben mindegyik csoportnak egy tagja szerepel. Mindegyik csoportból n-féleképpen választhatunk egy embert, tehát a lehetséges hármasok száma n^3. Mivel egyik hármas tagjai sem játsszák mind a három játékot egymás közt, így valaki mindkét partnerével ugyanazt a játékot játssza. Egy ilyen hármas $\mathcal{P}$-beli tagja mindkét partnerével csak pingpongot játszhat fenti megállapításaink szerint. Ha $\mathcal{S}$-ből j emberrel pingpongozik, $\mathcal{T}$-ből pedig k-val, akkor jk olyan hármasnak tagja, amelyiken belül két pingpongozó pár van. Egyrészt tudjuk, hogy összesen n pingpongpartnere van, így[1] $j+k \le n$, másrészt a mértani és számtani közép közti egyenlőtlenség szerint

$$jk \le \left(\frac{j+k}{2}\right)^2 \le \left(\frac{n}{2}\right)^2.$$

Mivel a $\mathcal{P}$ csoportnak n tagja van, tehát legfeljebb $n^3/4$ olyan hármas van, amelyikben két pingpongozó pár szerepel. Ugyanez igaz az olyan hármasok számára is, amelyekben két sakkozó, ill. amelyekben két teniszező pár szerepel. Ez azonban összesen is csak $3n^3/4$ hármast ad, kevesebbet, mint az összes tekintetbe vett hármasok száma. Indirekt feltevésünk tehát helytelennek bizonyult, kell olyan hármasnak lennie, amelyiknek tagjai mindegyik játékot játsszák egymás közt.

III. megoldás. Tekintsük ismét a társaságnak az előző megoldásban szereplő felbontását csoportokra. Becsüljük meg felülről azoknak a hármasoknak a számát, amelyekben szerepel A és amelyek nem felelnek meg a feladat állításában szereplő feltételnek. Csak olyan hármasok jönnek tekintetbe, amelyekben A-n kívül két különböző csoportbeli ember szerepel. Az ilyen hármasok száma $3n^2$. Azt is láttuk az előző megoldásban, hogy egy ilyen hármas akkor nem megfelelő, ha benne egy pingpongozó pár egyike $\mathcal{P}$-ből való, vagy egy sakkparti egyik résztvevője $\mathcal{S}$-ből, vagy egy teniszező pár egyike $\mathcal{T}$-ből való. Egy $\mathcal{P}$-beli P személy $\mathcal{S}$-ből és $\mathcal{T}$-ből együtt legfeljebb $n-1$ emberrel pingpongozik, mert egyik pingpongpartnere A. A tekintetbe vett hármasok közül azok száma, amelyekben a $\mathcal{P}$-beli n ember valamelyike pingpongozik a harmadik társsal, legfeljebb $n(n-1)$. Ugyanez mondható az olyan hármasok számáról, amelyekben egy $\mathcal{S}$-beli egyén sakkozik a harmadikkal és azokéról, amelyekben olyan $\mathcal{T}$-beli szerepel, aki teniszezik a harmadikkal. A $3n^2$ számba vett hármas közül tehát legfeljebb $3n^2-3n$ az, amelyikre nem teljesül a feladat állítása; legalább $3n$ hármasra tehát teljesül.

Megjegyzések. 1. Ha a meggondolást a társaság mind a $3n+1$ tagjára megismételjük, akkor minden számba jövő hármast háromszor veszünk tekintetbe. Ennek alapján a társaságból kiválasztható összes olyan hármasok száma, amelyekben mind a három játékot játsszák egymás közt, legalább $n(3n+1)$. Ugyanazt a becslést nyertük, mint az első megoldásban. Szoros

[1] Valójában $j+k \le n-1$ is fennáll, mert az illető egyik pingpongpartnere A.

rokonságban is van a két megoldás, amennyiben az utóbbiban is olyan hármasok számának becslése útján jutottunk célhoz, amelyekben csak kétféle játékot játszanak.

A fenti megoldásban azokat a hármasokat vettük számba, amelyekben szerepel A, de a két társával ugyanazt a játékot játszó személy $\mathcal{P}$-ben, $\mathcal{S}$-ben, vagy $\mathcal{T}$-ben van.

1988-02-058-1.eps

3.a ábra

1988-02-058-2.eps

3.b ábra

1988-02-058-3.eps

3.c ábra

2. A nyert korlát $n = 1$, 2, 3, 4 esetén pontos. Ezt az első három esetben leolvashatjuk a *3.a, 3.b, 3.c ábrákról*, amelyeken a pontok a társaság tagjait képviselik, a folytonos vonallal összekötöttek a pingpongozó párokat jelölik, a szaggatott vonalak a sakkpartikat, a pontozott összekötések pedig a teniszezőket. Az $n = 4$ esetben a 13 embert körbe állítva mindenki a két szomszédjával és a harmadik szomszédjaival pingpongozik, a második és az ötödik szomszédjaival sakkozik, a negyedik és a hatodik szomszédjaival pedig teniszezik. Az ezt feltüntető ábrát bonyolultsága miatt jobb, ha az olvasó magának nagyban és esetleg színes vonalakkal rajzolja meg.

Nagyobb n-ekre már mindig nagyobb a megfelelő hármasok száma az itt nyert értéknél.[2]

IV. megoldás. Eljárást adunk egy kívánt tulajdonságú hármas megkeresésére. Ismét a társaság előző megoldásokban szereplő csoportosításából indulunk ki. A $\mathcal{P}$ csoport egy P_1 tagja sakkozik másik csoportbeli emberrel, mert $\mathcal{P}$-ben rajta kívül $n-1$ ember van, tehát ennél több sakkpartnere sem lehet. Ha van sakkpartnere $\mathcal{T}$-ben, akkor azzal és A-val a feladat követelményének megfelelő hármast alkotnak. Ha nincs, akkor egy $\mathcal{S}$-beli S_1 sakkpartnerét véve, annak van teniszpartnere $\mathcal{S}$-en kívül. Ha teniszezik $\mathcal{P}$-beli társsal, akkor ismét megfelelő hármast alkotnak A-val. Ha nem, akkor egy $\mathcal{T}$-beli T_1 teniszpartnerről ismét feltehetjük, hogy $\mathcal{T}$-n kívüli pingpongpartnerei $\mathcal{P}$-ben vannak. Egyet kiválasztva az eljárást folytathatjuk, míg el nem jutunk vagy egy olyan párhoz, akik A-val együtt megfelelő hármast alkotnak, vagy olyan valakihez, aki már korábban is szerepelt. Utóbbi esetben egy kört kapunk, amelyikben egy-egy $\mathcal{P}$-, $\mathcal{S}$-, $\mathcal{T}$-beli személy követi egymást periodikusan, és mindenki olyan játékot játszik a rákövetkezővel, amilyent az utóbbi A-val játszik. Ha ez a kör három emberből áll, akkor ők megfelelő hármast alkotnak.

Megmutatjuk, hogy ha a kör ennél hosszabb, akkor kihagyható belőle három egymás utáni ember úgy, hogy a kör leírt szerkezete megmaradjon, vagy találunk egy megfelelő hármast. Legyen S, T, P', S', T' a kör öt egymás utáni tagja. Ha P' és T' sakkozik, akkor A-val, ha pedig pingpongozik, akkor S'-vel alkotnak megfelelő hármast. Az az eset vizsgálandó tovább, ha teniszeznek. Ha P' és S teniszezik, akkor A-val, ha sakkoznak, akkor T-vel alkotnak megfelelő hármast; marad az az eset, ha pingpongoznak. Nézzük ekkor S-et és T'-t. Ha pingpongoznak, akkor A-val, ha sakkoznak, akkor a vizsgált esetben P'-vel alkotnak megfelelő hármast. Ha viszont S és T' teniszezik, akkor T, P' és S' kihagyása után is megmarad a kör föntebb leírt szerkezete. Így az eljárás véges számú ismétlésével eljutunk a feladat állításának megfelelő hármashoz.

Megjegyzések. 1. A társaság tagjait pontokkal, a köztük zajló különböző játékokat különböző fajta vonalakkal ábrázolva, ahogyan azt a 3. ábrán is tettük, gráf keletkezik. A vonalakat – a gráf éleit – megkülönböztethetjük különböző színek használatával. Az olyan gráfot, amelyikben minden pontot mindegyik másikkal összeköt egy él, teljes gráfnak nevezik. Gráfok nyelvén fogalmazva és csekély általánosítással a következő tételt nyerjük: Ha $m \geqq 3$ és egy m szögpontú teljes gráf éleit 3 színnel színezzük úgy, hogy az egy-egy szögpontból induló különböző színű élek száma legfeljebb eggyel különbözzék, akkor van a gráfban olyan 3 pont, amelyeket különböző színű élek kötnek össze. A fenti megoldások az általánosabb esetben is célra vezetnek.

2. Láttuk, hogy az adott feltételek mellett nem csak létezik kívánt tulajdonságú hármas, de elég szép számban van. Kérdés, hogy nem lazíthatnánk-e a színeloszlás egyenletességének követelményén úgy, hogy a következmény még érvényes legyen. Nem elegendő-e például azt megkívánni, hogy bármelyik pontból induló egyszínű élek száma legalább az összes élek $0,3$ része legyen?

Annyi biztos, hogy ez az arányszám nem vihető 1/4 alá. Ez így látható be: vegyünk 4, egyenként n pontból álló ponthalmazt. Az egy halmazon belüli élek legyenek pirosak, azok, amelyek első és második halmazbeli pontokat vagy harmadik és negyedik halmazbelieket kötnek össze, kékek, a többi él legyen zöld. Ekkor minden pontból $n-1$ piros él indul ki, n kék és $2n$ zöld, és könnyen látható, hogy nincs háromszínű háromszög. Felmerül a kérdés, hol van a kritikus határ 1/3 és 1/4 közt. Lapzártakor értesültünk, bizonyítást nyert, hogy az 1/4 érték az.

[2] Erre a kérdésre lapunkban visszatérünk (szerk.).