I. megoldás: Van ilyen ponthalmaz és nagyon sokféleképpen lehet ilyent megadni. Egy derékszögű koordinátarendszerben a pont koordinátáit x, y, z-vel jelölve minden sík egyenlete írható

$$ax + by + cz + d = 0$$

alakban, ahol a, b, c közt van 0-tól különböző. A ponthalmazt úgy adjuk meg, hogy minden valós t értékhez hozzárendeljük azt a pontot, amelyiknek koordinátái

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t).$$

Az f, g, h függvényeket úgy kell választanunk, hogy az

$$af(t) + bg(t) + ch(t) + d = 0$$

egyenletnek legyen legalább egy gyöke, ha a, b, c közül legalább az egyik nem 0, de mindig csak véges sok gyöke legyen.

Kézenfekvő polinomokat választani, mert tudjuk, hogy egy polinomnak csak véges sok gyöke lehet: legfeljebb annyi, mint a foka, kivéve természetesen a 0 polinomot. Azt is tudjuk továbbá, hogy (valós együtthatós) páratlan fokú polinomnak mindig van legalább egy (valós) gyöke. Ezek alapján az $x = t^5$, $y = t^3$, $z = t$ összefüggésekkel jellemzett ponthalmaz megfelel. Ezt írhatjuk kicsit egyszerűbben

$$x = z^5, \qquad y = z^3$$

alakban is. Valóban, az

$$az^5 + bz^3 + cz + d = 0$$

egyenlet a mondott feltételek mellett mindig páratlan: 5-öd-, 3-ad- vagy elsőfokú, így a ponthalmaznak minden síkkal legalább egy és legfeljebb 5 közös pontja van.

Megjegyzések. 1. Mint a megoldás is utal rá, f, g, h-nak bármilyen három különböző, páratlan fokú polinomot választhatunk. Használhatunk páros fokú polinomot is alkalmas előjel-megállapodásokkal kombinálva. Könnyű látni pl., hogy a következő ponthalmaznak:

$$z = x^3, \quad y = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

szintén van pontja minden síkon és mindegyiken csak véges számú. Belátható, hogy ennek is legfeljebb 5 pontja lehet egy síkon. Ennek igazolását az olvasóra bízzuk.

2. A megadott ponthalmazok pontjai térbeli görbét alkotnak. Az előző megjegyzésben szereplő görbéhez eljuthatunk úgy, hogy az x- és z-tengely síkjában megrajzoljuk a $z = x^3$ egyenletű görbét és tekintjük az ennek a pontjain át az y tengellyel párhuzamosan húzott egyenesek alkotta (általános) hengerfelületet; az y- és x-tengely síkjában pedig az origóban érintkező, első, ill. harmadik negyedben futó két félparabolaívből álló görbe pontjain át a z-tengellyel párhuzamosan húzott egyenesek alkotta hengerfelületet képezzük. A két felület metszésvonala adja a szóban forgó görbét (*1. a, b, c ábra*).

1988-02-053-1.eps

1.a ábra

1988-02-053-2.eps

1.b ábra

1988-02-054-1.eps

1.c ábra

3. Használhatók polinomok helyett más függvények is. Erre mutat példát a következő megoldás.

II. megoldás. Három térbeli görbe vonalat adunk meg, amelyek egyesítésére teljesülnek a követelmények. Ezek szemléletesen így származtathatók. Egy 2π szélességű végtelen sáv középvonala legyen az ordinátatengely. Ábrázoljuk a $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ függvényt a $-\pi < \varphi < \pi$ számközben (*2.a ábra*), majd hajlítsuk össze a sávot egy (egységnyi sugarú) hengerré. A henger három példányát helyezzük el úgy, hogy a tengelyük rendre az x-, y-, z-tengely legyen, a sáv $(0, 0)$ pontja pedig az y-, z-, illetőleg x-tengely egységpontjába kerüljön. (A *2.b ábra* a harmadik hengert ábrázolja.)

1988-02-054-2.eps

2.a ábra

1988-02-054-3.eps

2.b ábra

A feltételek teljesülésének igazolásához célszerű a pontok koordinátáit formulákkal megadni. A z-tengely körüli henger egy pontja legyen P, vetülete az x, y koordinátasíkon P', az ehhez mutató vektornak az x-tengely pozitív felével bezárt szöge φ. Ekkor az (1, 0, 0) ponttól P'-ig terjedő körív hossza is φ, így a P pont koordinátái:

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad z = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

A másik két görbe pontjainak koordinátái:

$$x = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \qquad \mathrm{y} = \cos\varphi, \qquad \mathrm{z} = \sin\varphi, \qquad \text{ill.}$$
$$x = \sin\varphi, \qquad y = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \qquad \mathrm{z} = \cos\varphi;$$

φ mindhárom esetben $-\pi$ és π közti szöget jelent (radiánban mérve).

Egy tetszés szerinti sík egyenlete

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{1}$$

alakú, ahol a, b, c közt van 0-tól különböző. Ennek a harmadik görbével való metszéspontjai azok a pontok, amelyek koordinátái az

$$a\cos\varphi + b\sin\varphi + c\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + d = 0$$

egyenletnek eleget tévő φ értékekhez az első egyenlethármassal meghatározott értékek.

Az egyenlet $t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$-re vonatkozó algebrai egyenletté alakítható a következő összefüggések felhasználásával:

$$\sin\varphi = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2t}{t^2+1};$$

$$\cos\varphi = \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Ezeket beírva, a törteket eltávolítva és az egyenletet rendezve kapjuk, hogy:

$$ct^3 + (d-a)t^2 + 2bt + a + d = 0. \tag{2}$$

Ennek legfeljebb 3 megoldása van (a valós számok körében), kivéve, ha az azonosan 0 polinomról van szó, vagyis ha

$$b = c = d - a = a + d = 0.$$

Ekkor azonban a és d is 0, s így az (1) egyenlet minden (x, y, z) számhármasra teljesül, nem sík egyenlete. Mivel $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ a $-\pi < \varphi < \pi$ számközben minden valós értéket felvesz, és mindegyiket csak egyszer, így a síknak a görbével legfeljebb 3 közös pontja lehet.

Ugyanígy adódik, hogy egy síknak a másik két görbével is legfeljebb 3-3 közös pontja lehet, az egész ponthalmazzal tehát legfeljebb 9.

Az is világos, hogy minden síknak van közös pontja a halmazzal, mert ha pl. $c \neq 0$, akkor a (2) egyenlet harmadfokú és így van valós gyöke.

Megjegyzések. 1. Szemléletesen a hengert elmetszettük egy síkkal, és azt kérdezzük, hogy ha a hengerfelületet egy alkotója mentén felvágjuk és a síkba terítjük, a metszésvonal hány pontban metszi a tangensgörbe képét. Belátjuk, hogy ha a sík metszi a henger tengelyét, de nem merőleges rá, akkor a metszésvonal a síkba terítve egy szinuszvonalat ad.

Valóban, a henger egy tetszés szerinti pontjának koordinátái $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, z alakban írhatók, így az (1) síkkal való metszéspontokat azok a φ értékek szolgáltatják, amelyekre

$$a\cos\varphi + b\sin\varphi + cz + d = 0.$$

A síkra kimondott feltételek akkor teljesülnek, ha c, továbbá a és b közül legalább az egyik nem 0. Ekkor egyenletünk így alakítható át:

$$z = -\frac{a}{c}\cos\varphi - \frac{b}{c}\sin\varphi - \frac{d}{c} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\sin(\varphi - \alpha) - \frac{d}{c},$$

ahol α-t a

$$\sin\,\alpha=\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\,\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

összefüggések határozzák meg. Ezzel a kimondott állítást igazoltuk. A fenti meggondolás azt a szemléleti megfigyelést igazolja, hogy a két vonalnak legfeljebb 3 metszéspontja lehet.

2. Megfelelő ponthalmazok számtalan más elgondolás alapján is elkészíthetők, és merült is fel sok további példa a dolgozatokban. Többen állították azonban azt is, egyesek indokolni is próbálták, hogy a kívánt tulajdonságú ponthalmaz nem létezik.

3. A felmerült példák mindegyikében volt olyan sík, amelyik a ponthalmaznak legalább 5 pontját tartalmazta. Kézenfekvő kérdés, hogy nem adható-e meg olyan ponthalmaz, amelyiknek minden síkon 5-nél kevesebb pontja van. Nem csökkenthető ez a szám 3 alá, hiszen a halmaz bármely 3 pontján át fektethető sík. Mély halmazelméleti módszerekkel bebizonyítható, hogy létezik olyan ponthalmaz is, amelyiknek minden síkon pontosan 3 pontja van. Ez a bizonyítás azonban csupán a ponthalmaz létezését adja, előállításához vagy egyáltalán az elképzeléséhez sem ad semmilyen támpontot.

Megmutatható hogy egy folytonos vonalnak, ha kielégíti a feltételeket, mindig van 5 egy síkban lévő pontja.