I. megoldás. Mivel a négy szám szerepe semmiben sincs kitüntetve egymáshoz képest, feltehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hogy a a legkisebb, továbbá, hogy $c<d$, tehát

$$a<b, \quad a<c<d.$$

Nem lehet $a \geq 2$, mert akkor $c \geq 3$, és így

$$ab \geq 2b > a+b = cd \geq 3d > c+2d = ab+d > ab$$

kellene, hogy fennálljon, de ez lehetetlen. Eszerint

$$a=1, \quad c \geq 2 \quad \text{és} \quad d \geq c+1,$$

tehát

$$a+b = 1+b = cd \geq 2d \geq c+1+d = ab+1 = b+1.$$

Ez csak úgy állhat fenn, ha mindenütt az egyenlőség jele érvényes, tehát

$$c=2, \quad d=c+1=3, \quad \text{és} \quad b=cd-1=5.$$

Az $1,\ 5$ és $2,\ 3$ számpár valóban megfelel a feltételeknek. Ezekből további 7 megfelelő számpárt kapunk, ha a párok elemeit egymás közt felcseréljük, továbbá ha a két párt megcseréljük.

II. megoldás. Alakítsuk át a feltételi egyenlőségek felhasználásával az $(a-1)(b-1)$ szorzatot:

$$(a-1)(b-1) = ab-a-b+1 = c+d-cd+1 = 2-(c-1)(d-1),$$

azaz

$$(a-1)(b-1)+(c-1)(d-1) = 2.$$

Miután a feladat pozitív egész számokról szól, ez csak úgy állhat fenn, ha a bal oldalon vagy mindkét tag 1, vagy az egyik 0, a másik 2. Az első lehetőség egyedül az $a=b=c=d=2$ esetben következik be. Ezekre teljesülnek a feladatban megkívánt egyenlőségek, de a számok nem különbözők.

A második eset akkor következik be, ha az egyik szám 1, mondjuk $a=1$, amiből következik, hogy

$$(c-1)(d-1) = 2.$$

Feltehetjük, hogy $c<d$. Ekkor $c-1=1$, $d-1=2$ kell, hogy legyen, azaz $c=2$, $d=3$ és $b=1\cdot b=c+d=5$. Ezek az értékek kielégítik a feladat összes követelményét.

III. megoldás. A feltételi egyenlőségekből következik, hogy

$$1 = \frac{a+b}{cd} \cdot \frac{c+d}{ab} = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

A jobb oldalon vagy mind a két tényező 1, vagy az egyik – mondjuk az első – nagyobb, a másik kisebb, mint 1. Az első feltétel csak úgy teljesülhet, ha mindegyik tört értéke $\frac{1}{2}$, tehát $a=b=c=d=2$, de ezek nem különbözők.

A második esetben, tehát ha

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} > 1,$$

nem lehet $a>1$, mert akkor $b>2$, s így

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{3} < 1.$$

Eszerint $a=1$, s így $b \geq 2$, amiből következik, hogy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leq 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \text{tehát} \quad \frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geq \frac{2}{3}.$$

Nem lehet $c>2$, mert akkor $d>3$, s így

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{4} < \frac{2}{3}.$$

Eszerint $c=2$ és a feltételi egyenletek így alakulnak:

$$b = 1\cdot b = 2+d, \quad 1+b = 2d = 2b-4,$$

tehát $b=5$, $d=3$. Az $1,\ 5;\ \ 2,\ 3$ számpárok megfelelnek a feltételeknek.

Megjegyzés. Miután megállapítottuk, hogy $a=1$, érdekes befejezés a következő: az

$$1+b=cd, \quad b=c+d$$

egyenlőségekből a másodikat c-vel szorozva és az elsőt felhasználva

$$bc=c^2+1+b.$$

Az egyenlőséget 4-gyel szorozva így alakítjuk át:

$$4c^2-4bc+b^2+8=b^2-4b+4, \quad \text{azaz} \quad (2c-b)^2+8=(b-2)^2.$$

A négyzetszámok közül csak az 1 és a 9 különbsége 8, tehát $|2c-b|=1,\ |b-2|=3$, és innen ismét megkapjuk az előbbi két számpárt.

IV. megoldás. A feltételi egyenletekből következik, hogy

$$\frac{ab}{a+b}=\frac{c+d}{cd}.$$

Mind a két tört pozitív , s így vagy $\frac{ab}{a+b}$ is, $\frac{c+d}{cd}$ is 1, vagy az egyik, mondjuk az első, kisebb 1-nél, a második nagyobb nála. Az első esetben $ab=a+b$, amiből $(a-1)(b-1)=1$, s így – pozitív egész számokról lévén szó – $a=b=2$. Ezek azonban nem különbözők.

A második esetben $ab<a+b$, és mivel egész számokról van szó,

$$ab \le a+b-1, \quad \text{azaz} \quad (a-1)(b-1) \le 0.$$

A bal oldal nem lehet negatív, tehát 0 az értéke, vagyis az egyik szám, mondjuk $a=1$.

Ekkor

$$cd=1+b=1+1\cdot b=1+c+d,$$

amiből c-t kifejezve

$$c=\frac{d+1}{d-1}=1+\frac{2}{d-1}.$$

Mivel c egész, így d csak 2 vagy 3 lehet, c megfelelő értékei pedig 3 ill. 2. Ezzel ismét az $1,\ 5$ és $2,\ 3$ számpárokhoz jutottunk.