I. megoldás. Az első 100 pozitív egész szám közül kiválasztható k-asok közül úgy választunk ki csoportokat, ameddig tudunk, hogy egy-egy csoportban ugyanannyinak az összege legyen páros, mint amennyié páratlan. Válasszuk ki először azokat, amelyekben szerepel vagy az 1 vagy a 100, de nem mind a kettő. Ezeket párokba állíthatjuk úgy, hogy az első 98 szám közül kiválasztott egy-egy $k-1$-eshez egyszer az 1-et, egyszer a 100-at vesszük k -adiknak. Ekkor minden pár egyik k-asának az összege páros, a másiké páratlan.

A maradó k-asok közül vegyük azokat, amelyek a 2 és a 99 közül az egyiket tartalmazzák, a másikat nem. Ezek közül is ugyanannyinak az összege páros, mint amennyié páratlan, az előbbi gondolatmenet szerint. Az eljárást tovább ismételjük a $3,\ 98$, a $4,\ 97, \ldots$, az $50,\ 51$ párral. Ezután már csak olyan k-asok maradnak meg, amelyek a kiválasztáshoz használt párok közül bizonyosaknak mindkét eleméből tevődnek össze. Ilyenek csak páros k esetén vannak, tehát páratlan k esetén A-nak és B-nek egyenlő esélye van a nyerésre.

Páros k esetén azok a k-asok maradnak meg, amelyek az említett 50 pár közül $k/2$-nek mindkét eleméből állnak. Mivel mindegyik pár két elemének összege 101, tehát páratlan szám, így mindegyik fennmaradt k-as elemeinek összege páros, ha $k/2$ páros és páratlan, $k/2$ páratlan. Ezek szerint A-nak nagyobb a nyerési esélye, ha k osztható 4-gyel, ha viszont k 4-gyel osztva 2 maradékot ad, akkor B esélye nagyobb a nyerésre.

Megjegyzések. 1. Az elmondottak alapján ki is számíthatjuk, ki hány esetben nyer. A kiválasztható k-asok száma $\binom{100}{k}$ és, ha k páros, akkor $\binom{50}{k/2}$-vel több esetben nyer az egyik játékos, mint a másik. Így páratlan k esetén mindegyikük

$$\frac{1}{2}\binom{100}{k}$$

esetben nyer, páros k esetén pedig az egyikük és másikuk számára kedvező esetek száma

$$\frac{1}{2}\left(\binom{100}{k}-\binom{50}{k/2}\right), \quad \text{ill.} \quad \frac{1}{2}\left(\binom{100}{k}+\binom{50}{k/2}\right).$$

2. Az eljárás alkalmazható akkor is, ha 100 helyett bármilyen páros N számot mondunk. A válasz ekkor is ugyanaz, mint a 100 esetében volt. Ha páratlan N számot veszünk 100 helyett, akkor már sohasem egyenlők a nyerési esélyek. Ilyenkor 1 és $N-1$, majd 2 és $N-2$, 3 és $N-3$ és így tovább, ismét használhatók egyenlő esélyt adó k-asok kiválasztására. A fennmaradó k-asok közül külön kell foglalkozni azokkal, amelyekben előfordul az N. A részletek végiggondolását az olvasóra bízzuk. B-nek nagyobb a nyerési esélye, ha k 4-gyel osztva 1 vagy 2 maradékot ad, különben A-nak.

II. megoldás. Vizsgáljuk az $1,\ 2,\ \ldots,\ 2N$ számok közül kiválasztható k-asokat. Jelöljük $D(N,\ k)$-val a páros, illetve a páratlan összegű k-asok számának a különbségét. Erre a függvényre állapítunk meg egy rekurzív összefüggést. Legyen $k \leqq 2N-2$. Csoportosítsuk a k-asokat aszerint, hogy hány számot tartalmaznak a $(2N-1,\ 2N)$ párból. Az első csoportba tartozzanak azok a k-asok, amelyek tartalmazzák mind a kettőt, a másodikba azok, amelyek egyiket sem tartalmazzák, a harmadikba pedig azok, amelyek az egyiket tartalmazzák, a másikat nem.

A harmadik csoportbeli k-asoknak $k-1$ eleme nem nagyobb $2N-2$-nél, és minden ilyen $k-1$-es a $2N-1$-gyel és a $2N$-nel is k-assá egészíthető ki. Az elemek összege a két k-as közül az egyikben páros, a másikban páratlan. A harmadik csoportban tehát ugyanannyi páros összegű k-as van, mint páratlan összegű, így ezek járuléka $D(N,\ k)$ értékéhez 0.

A második csoport k-asai csupa $2N-2$-nél nem nagyobb számból állnak, ezek tehát $D(N-1,\ k)$-t adnak $D(N,\ k)$ értékéhez.

Az első csoport minden k-asa $k-2$ elemet tartalmaz, amelyek nem nagyobbak $2N-2$-nél, továbbá a $2N-1$-et és a $2N$-et. Az első $k-2$ elem összegét tekintve a vizsgált különbség $D(N-1,\ k-2)$. A k-asokban még $2N-1+2N$, tehát páratlan szám adódik az összeghez, így annak párossága az ellenkezőjére változik. Az első csoport k-asai, tehát $-D(N-1,\ k-2)$-vel járulnak hozzá $D(N,\ k)$ értékéhez. Ezzel a következő összefüggést kaptuk:

$$D(N,\ k)=D(N-1,\ k)-D(N-1,\ k-2). \tag{3}$$

Az összefüggés $k=2N-1$-re és $k=2N$-re is helyes, ha megállapodunk abban, hogy ha $k>2N$, akkor $D(N,\ k)$ jelentsen 0-t.

Ennek alapján teljes indukcióval igazoljuk a következő állítást: $D(N,\ k)$ pozitív, ha k osztható 4-gyel, negatív, ha k páratlan szám kétszerese, és 0, ha k páratlan. Belátjuk először, hogy ez $k=1,\ 2,\ 3$ és 4-re igaz. ($2N$ tetszőleges, k-nál nem kisebb páros szám.)

$k=1$-re N páros szám van az adottak közt és N páratlan, így $D(N,\ 1)=0$.

Párokat választva ki, akkor lesz az összeg páros, ha vagy mind a két szám páros, vagy mind a kettő páratlan, és akkor lesz páratlan, ha az egyik szám páros, a másik páratlan. Az előbbi és az utóbbi típusú párok száma $2\binom{N}{2}=N(N-1)$, ill. N^2, tehát $D(N,\ 2)=-N<0$. Ezek az értékek $N=1$-re is helyesek.

Három szám összege páros, ha mindegyik szám páros, vagy egyikük páros, a másik kettő páratlan; viszont páratlan az összeg, ha mindegyik szám páratlan, vagy ha egyikük páratlan, a másik kettő pedig páros. Mivel a páros és páratlan számok száma egyenlő, így a kétféle hármasok száma is megegyezik, tehát

$$D(N,\ 3) = 0.$$

Ha $k = 4$, akkor páros összeget kapunk, ha mind a 4 páros, vagy mind a 4 páratlan, vagy közülük 2 páros, 2 páratlan. Páratlan lesz az összeg, ha a 4 szám között 1 páratlan van, vagy ha 1 páros van. Az egyik-, ill. másikféle esetek száma

$$\begin{aligned} 2\binom{N}{4} + \binom{N}{2}^2 &= \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{12} + \frac{N^2(N-1)^2}{4} = \\ &= \frac{N(N-1)(2N^2-4N-3)}{6}, \end{aligned}$$

illetőleg

$$2N\binom{N}{3}\frac{N^2(N-1)(N-2)}{3} = \frac{N(N-1)(2N^2-4N)}{6};$$

$N = 2$ esetén az esetek száma 1, ill. 0. Eszerint

$$D(N,\ 4) = \frac{n(N-1)}{2} > 0.$$

A vizsgált k értékek esetén tehát minden szóba jövő N-re igaz az állítás. Ekkor egyszersmind $N = 1$ és $N = 2$-re minden szóba jövő k esetén igaz az állítás.

Tegyük most fel, hogy $M > 2$, $K > 4$ és igaz az állítás, ha $k < K$, továbbá az M-nél kisebb N-ekre tetszés szerinti szóba jövő k mellett. A (3) összefüggés szerint

$$D(M,\ K) = D(M-1,\ K) - D(M-1,\ K-2).$$

Ha K páratlan, akkor $K-2$ is, így feltevés szerint a jobb oldal mindkét tagja 0, tehát $D(M,\ K)$ is az. Ha K páros, akkor $K-2$ is, és feltevés szerint $D(M-1,\ K)$, ha nem 0 (ti. ha $M = K$), ellenkező előjelű, mint $D(M-1,\ K-2)$. Az indukciós feltételből az is következik, hogy $D(M-1,\ K-2)$ nem 0. Azt kaptuk tehát, hogy $D(M,\ K)$ sem 0, és ellenkező előjelű, mint $D(M-1,\ K-2)$. Ez azonban azt jelenti, hogy az állítás helyessége öröklődik M és K-ra. A kimondott állítás tehát minden szóba jövő $N,\ k$ értékpárra igaz.

Megjegyzések. 1. Felesleges volt $D(N,\ 3)$ és $D(N,\ 4)$ kiszámítása, mert az indukciós bizonyítás már ezekre is adja az állítás helyességét. Jónak láttuk azonban mind a 4 lehetséges esetre bemutatni egy-egy példát. Aki nem tartja erőszakoltnak a $k = 0$ eset megengedését, ezt tekintheti a $k = 2$ helyett további egyszerűsítésként.

2. A teljes indukciónak itt egy ritkábban előforduló esetével találkoztunk, a két változó szerint egyidejűleg futó teljes indukcióval, hiszen mikor M-re és K-ra bizonyítottuk az öröklődést, fel kellett használnunk azt is, hogy $M-1$-re és ugyanerre a K-ra igaz az állítás. Így tulajdonképpen a $k = 2$ eset után $k = 3$-ra és minden N-re, majd $K = 4$-re és így tovább adódik az állítás helyessége. Ehhez viszont kell az, hogy a legkisebb N értékre minden szóba jövő k esetén igaz legyen az állítás. Esetünkben ez mindössze az $N = 1$, $k = 1,\ 2$ eseteket jelentette. Annyiban is speciális volt ez a bizonyítás, hogy M-re a K-nál kisebb k-kra nem volt szükséges felhasználnunk az indukciós feltevést.

III. megoldás. Az előző megoldásban bevezetett jelöléssel $D(50,\ k)$-t kapcsolatba hozhatjuk az

$$1 + (-1)^c x, \quad c = 1,\ 2,\ \ldots,\ 100$$

elsőfokú polinomok szorzatával. Ebben úgy kapjuk a k-adfokú tagokat, hogy k tényezőből az x-es tagot vesszük, a többiből az 1-et, ezeket összeszorozzuk és az összes ilyen tagot összeadjuk. Egy-egy ilyen tagban x^k együtthatója -1-nek a $c_1 + c_2 + \ldots + c_k$-adik hatványa, ahol az összeadandók különböző, 100-nál nem nagyobb egészek. Az együttható tehát 1, ha az összeg páros, -1, ha az összeg páratlan. Eszerint x^k együtthatója a szorzatban éppen $D(100, k)$.

A szorzat másfelől felváltva $1 + x$ és $1 - x$ tényezők szorzata, vagyis

$$\left(1 - x^2\right)^{50} = 1 - 50x^2 + \ldots + (-1)^j\binom{50}{j}x^{2j} + \ldots + x^{100}.$$

Eszerint egyenlők a nyerési esélyek, ha k páratlan, $\binom{50}{j}$-vel több esetben nyer A, mint B, ill. B, mint A, ha $k = 2j$ és j páros, ill. páratlan.

Megjegyzés. Az $F(k) = D(100, k)$ függvényt úgy sikerült meghatároznunk, hogy hozzárendeltük az

$$F(x) = 1 + f(1)x + f(2)x^2 + \ldots + f(100)x^{100}$$

polinomot, amit sikerült más alakba írni és abból f értékeit meghatározni. F-et az f generátor függvényének nevezzük. A generátorfüggvény gondolata és számos érdekes alkalmazása Leonhard Euler (1707–1783) rendkívül termékenynek bizonyult felfedezése, ami a matematika számos ágában alapvető szerepet kapott. Feladatunkban alkalmazható 100 helyett tetszés szerinti N számra és az I. megoldáshoz fűzött 2. megjegyzésben kimondott eredményre vezet. A számolás elvégzését az olvasóra bízzuk.