I. megoldás. Nézzük két egymás utáni tag összegét:

$$\frac{a_i}{a_i+a_{i+1}}+\frac{a_{i+1}}{a_{i+1}+a_{i+2}},$$

itt az utolsó tag utánin az elsőt értve. Ennek megfelelően a_{n+1}, a_{n+2} jelentsen a_1-et, ill. a_2-t. A két tag összege legalább 1, ha $a_{i+2} \leqq a_i$, és legfeljebb 1, ha $a_{i+2} \geqq a_i$.

Válasszuk i-t úgy, hogy a_{i+2} az előforduló legkisebb érték legyen. Ekkor a kiszemelt két tag összege legalább 1. A többi tag mind pozitív, és feltétel szerint van még legalább egy tag, így az összeg mindig nagyobb, mint 1. Ha viszont i-t úgy választjuk, hogy a_{i+2} az előforduló legnagyobb érték legyen, akkor a kiválasztott két tag összege legfeljebb 1; miután a további $n-2$ tag mindegyike kisebb 1-nél, igy azt kapjuk, hogy az összeg mindig kisebb, mint

$$1+n-2=n-1.$$

Megmutatjuk, hogy az összeg mind a két korláthoz tetszés szerint közel kerülhet, ha az a_i sorozatot alkalmasan választjuk. Az

$$a_i=q^{i-1}, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

pozitív q hányadosú mértani sorozathoz tartozó S_q összeg :

$$S_q=\frac{n-1}{1+q}+\frac{q^{n-1}}{q^{n-1}+1}.$$

Becsüljük ezt felülről. Bármilyen (kis) pozitív szám is p,

$$S_q<\frac{n-1}{1+q}+1<1+\frac{n-1}{q}<1+p, \quad \text{ha} \quad q>\frac{n-1}{p}.$$

Másrészt alulról becsülve S_q-t

$$S_q>\frac{n-1}{1+q}=n-1-\frac{q(n-1)}{1+q}>(n-1)-(n-1)q>n-1-p, \quad \text{ha} \quad q<\frac{p}{n-1}.$$

Ezzel beláttuk, hogy a feladatban kérdezett értékek : $h=1$, $H=n-1$.

Megjegyzések. 1. A vizsgált összeg felvesz minden értéket 1 és $n-1$ között. Ez igaz már a mértani sorozathoz tartozó S_q összegre, hiszen ez pozitív q-kra q-nak folytonos függvénye, amelyik felvesz $n-1$-hez tetszés szerint közeli értékeket is és 1-hez tetszés szerint közelieket is, tehát minden közbenső értéket is.

2. A további megoldásokban csak azt bizonyítjuk, hogy a kérdéses összeg 1 és $n-1$ közé esik. Az, hogy ezek a korlátok nem javíthatók, ugyanúgy látható be, mint az I. megoldásban.

II. megoldás. Fel fogjuk használni, hogy ha $x/y<1$, és $x,\ y$ pozitív, továbbá z is pozitív szám, akkor

$$\frac{x}{y}<\frac{x+y}{y+z}.$$

Valóban

$$\frac{x}{y}=\frac{x}{y}(y+z)\frac{1}{y+z}=\left(x+\frac{x}{y}z\right)\frac{1}{y+z}<\frac{x+z}{y+z}.$$

Jelöljük a rövidség kedvéért az $a_1+a_2+\ldots+a_n$ összeget S-sel. Egyfelől csökkentjük az i-edik törtet, ha a nevezőjéhez hozzáadjuk az $S-a_i-a_{i+1}$ összeget, másfelől növeljük, ha ezt az összeget a számlálóhoz is, a nevezőhöz is hozzáadjuk. Így a következő kettős egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{a_i}{S}<\frac{a_i}{a_i+a_{i+1}}<\frac{S-a_{i+1}}{S}.$$

Itt a_{n+1} ismét a_1-et jelent. Összeadva az egyenlőtlenségpárokat $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$-re a bal oldalon 1-et, a jobb oldalon $n-1$-et kapunk, vagyis a kívánt egyenlőtlenséget.

III. megoldás. Jelöljük T_n-nel a feladatban szereplő összeget és az a_n, a_{n-1}, …, a_1 fordított sorrendben vett sorozathoz tartozót $T_n^{'}$-vel. Mind a két összeg törtjeiben ugyanazok a nevezők lépnek fel, és a két összeg azonos nevezőjű törtjeinek az összege 1, így

$$T_n+T_n^{'}=n.$$

Így ha megmutatjuk, hogy a szóban forgó összeg mindig nagyobb, mint 1, akkor ez igaz $T_n^{'}$-re is, tehát

$$T_n=n-T_n^{'}<n-1.$$

Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy 1 alsó korlát. Az $n=3$ esetben közös nevezőre hozva az összeget, és számlálót, nevezőt tagokra bontva a nevező minden tagja előfordul a számlálóban is legalább akkora együtthatóval. A számításokat elvégezve:

$$T_3 = 1 + \frac{a_1a_2a_3 + a_1^2a_2 + a_2^2a_3 + a_3^2a_1}{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_1)} > 1.$$

Tegyük most fel, hogy az n pozitív számból képezett összegek mindig 1-nél nagyobbak, ahol $n \geqq 3$. Ekkor elég azt megmutatnunk, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ összeg nagyobb az első n számból képezettnél. De

$$T_{n+1} - T_n = \frac{a_n}{a_n + a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + a_1} - \frac{a_n}{a_n + a_1} =$$
$$= \frac{a_n}{a_n + a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + a_1} + \frac{a_1}{a_1 + a_n} - 1 > 0,$$

mert a három tört összege az a_n, a_{n+1}, a_1 számokból képezett összeg, és erről már beláttuk, hogy mindig nagyobb 1-nél. Így, felhasználva az indukciós feltevést is,

$$T_{n+1} > T_n > 1,$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzések. 1. Az utolsó bizonyítást lényegesen egyszerűsíthettük volna egyrészt azzal az észrevétellel, hogy T_{n+1} nem változik meg, ha a számokat ciklikusan cseréljük. Így választhatjuk a sorrendet úgy, hogy a_{n+1} az előforduló legkisebb érték legyen. Ekkor a $T_{n+1} - T_n$ különbségben az első tag nem kisebb a kivonandónál, a különbség tehát pozitív. Másrészt képezhető a szóban forgó összeg két számból is és az értéke 1, így minden 2-nél nagyobb n-re már 1-nél nagyobb. Ezzel elkerülhető minden számolás.

A fenti megoldás viszont azt mutatja, hogy az indukciós bizonyítás minden további fogás nélkül is célra vezet. így viszont a 3 tag esetére nem lett volna érdemes elkerülni a kiszámolást, mert azt a megoldás második részében is fel tudtuk használni.

2. A vizsgált összeg valójában csak az a_{i+1}/a_i hányadosoktól függ. Jelöljük ezeket b_i-vel $i = 1, 2, \ldots, n-1$-re és legyen $b_n = a_n/a_1$. Ekkor a vizsgált összeg az

$$\frac{1}{1+b_1} + \frac{1}{1+b_2} + \ldots + \frac{1}{1+b_n}$$

alakot ölti, és itt

$$b_1 b_2 \ldots b_n = 1.$$

Vonjuk össze az utolsó két tagot:

$$\frac{1}{1+b_{n-1}} + \frac{1}{1+b_n} > \frac{1+b_{n-1}+b_n}{1+b_{n-1}b_n+b_{n-1}+b_n} > \frac{1}{1+b_{n-1}b_1}$$

a II. megoldásban alkalmazott megjegyzés alapján. Ezt beírva az összegbe a $b_1, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1}\, b_n$ számokból képezett $n-1$-tagú összeget kapjuk, és a számok szorzata továbbra is 1. Ennek alapján újabb teljes indukcíós bizonyítást nyerhetünk.