I. megoldás. Először is megmutatjuk, hogy a félegyenesek közös pontja csak a téglatest valamelyik csúcsa lehet. Mivel egy lapnak két átlója van, a három átló közül legalább kettőnek különböző lapokon kell lennie. Két ilyen átló nem lehet szemben fekvő lapokon, mert azok síkjai párhuzamosak, s így a rajtuk levő egy-egy egyenesnek nincs közös pontja. Két szomszédos lapon levő egyenesek csak a lapok metszésvonalán metszhetik egymást, két lapátló tehát csak úgy, ha egyik végpontjuk közös, vagyis a tégla egy csúcsa. Ekkor viszont a harmadik félegyenesen levő átló csak a kérdéses csúcsban találkozó harmadik oldallapnak a csúcsból induló átlója lehet.

1987-02-051-1.eps

1. ábra

Jelöljük a téglatest csúcsait A, B, C, D, $A^{'}$, $B^{'}$, $C^{'}$, $D^{'}$-vel az 1. ábra szerint, és tekintsük az A csúcsból induló lapátlókat. Jelöljük az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA^{'}}$ vektorokat $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$-vel, hosszukat a, b, c-vel. Ekkor az átlók irányába mutató vektorok:

$$\mathbf{e}=\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b},\quad \mathbf{f}=\overrightarrow{AB^{'}}=\mathbf{a}+\mathbf{c},\quad \mathbf{g}=\overrightarrow{AD^{'}}=\mathbf{b}+\mathbf{c}.$$

Két félegyenes akkor zár be hegyesszöget, ha az irányukba mutató vektorok skaláris szorzata pozitív. Esetünkben, mivel az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok páronként merőlegesek egymásra,

$$\mathbf{ef}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{c})=\mathbf{a}^2+\mathbf{ac}+\mathbf{ba}+\mathbf{bc}=a^2>0,$$

tehát az AC és $AB^{'}$ átlók közt hegyesszög van. Hasonlóan látható be, hogy a másik két átlópár is hegyesszöget zár be.

A szögek összegének megállapításához belátjuk, hogy a három átló közötti szögek megegyeznek pl. az $ACD^{'}$ háromszög belső szögeivel. Ebből természetesen következik, hogy összegük 180°.

$$B^{'}AD^{'}\sphericalangle=CD^{'}A\sphericalangle,$$

mert Pitagorasz tételéből

$$B^{'}D^{'2}=a^2+b^2=AC^2\quad \text{és}\quad CD^{'2}=a^2+c^2=AB^{'2},$$

tehát az $ACD^{'}$ és a $D^{'}B^{'}A$ háromszög megfelelő oldalai egyenlők, s így a háromszögek egybevágók. Felhasználva még a

$$B^{'}C^2=b^2+c^2=AD^{'2}$$

egyenlőséget is, kapjuk, hogy az $ACD^{'}$ és $CAB^{'}$ háromszögek is egybevágók, amiből következik, hogy

$$ACD^{'}\sphericalangle=CAB^{'}\sphericalangle.$$

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Most megmutatjuk, hogy ha α,β,γ olyan hegyesszögek, amelyek összege 180°, akkor van olyan téglatest, amelyiknek az egyik csúcsából induló lapátlók közti szögek α, β, illetőleg γ.

Rajzoljunk olyan háromszöget, amelyiknek a szögei α, β, illetőleg γ. Ilyen van, mert a szögek összege 180°. Legyen az α, β, γ szöggel szemközti oldal hossza e, f, illetőleg g. Ekkor egy olyan téglatest a, b, c éleire, amelyiknek három lapátlója az adott szögeket zárja be, az

$$a^2+b^2=e^2,\quad a^2+c^2=f^2,\quad b^2+c^2=g^2 \tag{1}$$

egyenletrendszernek kell teljesülnie. Ennek megoldása :

$$a=\sqrt{(e^2+f^2-g^2)/2},\quad b=\sqrt{(e^2+g^2-f^2)/2},\quad c=\sqrt{(f^2+g^2-e^2)/2}.$$

A gyökjelek alatt pozitív számok állnak, mert a koszinusztétel szerint ezek az értékek

$$ef\,\cos\gamma,\ eg\,\cos\beta,\ fg\,\cos\alpha, \tag{2}$$

és ezek a szögek hegyes volta miatt pozitívak.

Szerkesszünk ezekkel az élhosszúságokkal $ABCDA'B^{'}C^{'}D^{'}$ téglatestet. Az 1. ábra jelöléseit használva az A csúcsból induló AC, $AB^{'}$, AD' lapátlók hosszára ekkor rendre az (1) alatti értékek adódnak. Az átlókat vektoroknak tekintve páronkénti skaláris szorzataikra viszont a (2) alatti értékeket kapjuk, hiszen pl.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB^{'}}=a^2=(e^2+f^2-g^2)/2=ef\,\cos\gamma.$$

Itt felhasználtuk a megoldás elején végzett számítást is. Mivel a cosinus függvény 0° és 180° közt minden 1 és -1 közti értéket csak egyszer vesz fel, ez csak úgy lehet, ha a lapátlók szöge rendre γ, β és α. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. 1. A versenyzők nagy része számításon keresztül oldotta meg a feladatot, ezért választottunk elsőnek egy számításon alapuló megoldást. Akadtak olyanok is, akik a

$$\cos\Big((\mathbf{e},\,\mathbf{f})\sphericalangle+(\mathbf{f},\,\mathbf{g})\sphericalangle+(\mathbf{e},\,\mathbf{g})\sphericalangle\Big)=-1,$$

vagy a

$$\cos\Big((\mathbf{e},\,\mathbf{f})\sphericalangle+(\mathbf{f},\,\mathbf{g})\sphericalangle\Big)=-\cos(\mathbf{g},\,\mathbf{e})\sphericalangle$$

egyenlőség igazolásával látták be, hogy a szögek összege 180°.

2. Annak a belátására, hogy bármely 3 hegyesszöghöz, amelyeknek az összege 180°, van olyan téglatest, amelynek 3 lapátlója közti szögek éppen az adottak, azt bizonyítottuk be, hogy minden hegyesszögű háromszöghöz található a térben olyan pont, amelyiket a csúcsokkal összekötő egyenesek páronként merőlegesek. Lényegében ennek a bizonyítását kívánta az 1938. évi Eötvös verseny 3. feladata.[1]

3. A szögösszegre vonatkozó bizonyítás során azt láttuk be, hogy az $AB'CD'$ tetraéder kitérő élpárjai egyenlő hosszúak. Így az oldallapok egybevágó háromszögek. Az ilyen tetraédereket egyenlőoldalúnak nevezik. Ezek a szabályos tetraédernél kevésbé speciálisak, mégis rendelkeznek a szabályos háromszögek számos tulajdonságának a térbeli megfelelőjével.

A feladat megoldható számolás nélkül, amint a további megoldások mutatják. Nem bizonyítjuk újra, hogy a félegyeneseknek a tégla egy csúcsából kell indulniuk. Ennek bizonyítása egyébként nem igényelt számítást.

1987-02-053-1.eps

2. ábra

II. megoldás. Belátjuk, hogy a $CAD'\sphericalangle$ hegyesszög. Forgassuk a CAD' háromszöget CD' oldala körül a CDD' síkba; jelöljük A új helyzetét A_1-gyel. (2. ábra). D a CA_1D' háromszög belsejében lesz, ugyanis az A csúcs egy CD'-re bocsátott merőleges síkban mozog forgatás közben. Ennek a síknak az E metszéspontja a CD' egyenessel a CD' szakasz belsejében van, mert A merőleges vetülete, D, rajta van a CDD' sík és a merőleges sík metszésvonalán, az A_1E egyenesen; így DE a CDD' derékszögű háromszög D-ből húzott magassága, talppontja tehát az átfogó belsejére esik. Mivel az ADE háromszög AE átfogója nagyobb a DE befogónál, így D az A_1E szakaszon van. Ekkor azonban

$$CDE\sphericalangle>CA_1E\sphericalangle\quad\text{és}\quad EDD'\sphericalangle>EA_1D'\sphericalangle,$$

mert a bal oldalon a CA_1D, ill. a DA_1D' háromszög D-nél levő külső szöge áll, a jobb oldalon viszont az A_1 csúcsnál fekvő belső szög. A megfelelő oldalakat összeadva :

$$90^\circ=CDE\sphericalangle+EDD'\sphericalangle>CA_1E\sphericalangle+EA_1D'\sphericalangle=CA_1D'\sphericalangle,$$

és ezt akartuk bizonyítani. Hasonlóan látható be, hogy a másik két átlópár is hegyesszöget zár be.

Az $AB'CD'$ tetraéder egyenlőoldalú, mert az AB', CD', $B'C$, $D'A$ AC, $B'D'$ szembenfekvő élpárok a tégla két-két szembenfekvő lapjának egy-egy átlója ; ezek a lapok egybevágó téglalapok és a téglalap két átlója egyenlő hosszú.

Ekkor egybevágók a következő háromszögek : ACD', CAB', $D'B'A$ és így

$$CAB'\sphericalangle=ACD'\sphericalangle,\quad B'AD'\sphericalangle=CD'A\sphericalangle.$$

A jobb oldali szögek az ACD' háromszög belső szögei, tehát a három lapátló közti szögek összege :

$$B'AC\sphericalangle+CAD'\sphericalangle+D'AB'\sphericalangle=D'AC\sphericalangle+CAD'\sphericalangle+AD'C\sphericalangle=180^\circ.$$

Ezzel beláttuk a feladatban szereplő feltételek szükséges voltát.

1987-02-054-1.eps

3. ábra

Teljesüljön az α, β, γ hegyesszögekre az $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ összefüggés. Rajzoljunk $A_1A_2A_3$ háromszöget, amelyiknek ekkorák a szögei. Jelöljük az A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 oldalak felezőpontját rendre B', C, D'-vel (3. ábra). (Így maradunk összhangban az eddigi jelölésekkel.) A CA_1D' háromszöget a CD' oldala körül, a $B'A_2D'$ háromszöget pedig a $B'D'$ oldala körül forgatva az A_1 és A_2 pontok találkoznak a tér egy A pontjában. Az A_1 pont vetülete ugyanis az A_1-ből CD'-re állított merőlegesen mozog. Ez merőleges A_2A_3-ra is, tehát az $A_1A_2A_3$ háromszög magasságvonala. Metszéspontját CD'-vel jelöljük E-vel. Ez felezi a magasságot. Hasonlóan A_2 vetülete a $B'D'$-re merőleges egyenesen mozog a forgatás során. Ez a háromszög A_2-ből húzott magasságvonala, a háromszögbe eső szakaszát a $B'D'$-vel való F metszéspont felezi.

[1] Lásd : Hajós Gy.– Neukomm Gy – Surányi J.: Matematikai versenytételek, II. köt., 2. kiad. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1965) 65–66. old.

A két egyenes M metszéspontja a háromszög magasságpontja. Ez a háromszög belsejében van, mert a háromszög hegyesszögű. Az említett felezési tulajdonságok miatt

$$A_1E > EM \quad \text{és} \quad A_2F > FM.$$

Ennek folytán az a kör, amelyiken A_2 mozog, az M pontban a háromszög síkjára merőlegesen álló egyenest metszi. A metszéspont legyen A. Erre

$$AD^{'} = A_1D^{'} = D^{'}A_2,$$

így ugyanebbe a pontba jut a forgatás közben A_2 is. Az A pontra teljesülnek az

$$AC = CA_1 = CA_3 \quad \text{és} \quad AB^{'} = B^{'}A_2 = B^{'}A_3$$

egyenlőségek, tehát az $AB^{'}C$ háromszög egybevágó $A_3B^{'}C$-vel. Az $AB^{'}$, AC és $AD^{'}$ félegyenesek közti szögek tehát az adott hegyesszögekkel egyenlők, az $AB^{'}CD^{'}$ tetraéder pedig egyenlő oldalú.

Olyan téglatestet kell még szerkesztenünk, amelyiknek az A csúcsból induló élek lapátlói. Húzzunk $AB^{'}$ felezőpontján át olyan $D^{'}C$-vel egyenlő és egy irányban párhuzamos $A^{'}B$ szakaszt, amelyet a pont szintén felez, és hasonlóan $CD^{'}$ felezőpontján át $B^{'}A$-val egyenlő, párhuzamos és egyirányú $C^{'}D$ szakaszt, amelyet a pont szintén felez (4. ábra).

1987-02-054-2.eps

4. ábra

Ekkor $AA^{'}B^{'}B$ és $CC^{'}D^{'}D$ párhuzamos oldalú és egybevágó téglalapok, mert átlóik egyenlők és felezik egymást, tehát $ABCDA^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ paralelepipedon. Ekkor azonban téglalapok a többi lapjai is, mert

$$BD = B^{'}D^{'} = AC = A^{'}C^{'} \quad \text{és} \quad BC^{'} = AD^{'} = CB^{'} = DA^{'},$$

mivel a tetraéder szemben fekvő élei egyenlők. A paralelepipedon tehát téglatest. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. I. A megoldásból látható, hogy tetszés szerinti $AB^{'}CD^{'}$ tetraéderhez megszerkeszthető az $ABCDA^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ paralelepipedon, a tetraéder ún. bennfoglaló paralelepipedonja. Erre vonatkozóan lényegében azt láttuk be, hogy a bennfoglaló paralelepipedon akkor és csak akkor téglatest, ha a tetraéder egyenlőoldalú. Hozzátehetjük – ez könnyen látható –, hogy akkor és csak akkor kocka, ha a tetraéder szabályos.

2. Az előző megjegyzésnek és a feladat állításának az összevetéséből azt is kapjuk, hogy az egyenlőoldalú tetraéder élei közti szögek hegyesszögek. Nem igaz viszont a megfelelő állítás a lapok közti szögekre. A fenti megoldásban felhasználtuk, hogy az M magasságpont az $A_1A_2A_3$ háromszög belsejében van, mert az hegyesszögű. Nem kell azonban a $B^{'}CD^{'}$ középháromszögben lennie. Ha pl. a $D^{'}A_2B^{'}$ háromszögbe esik (5. ábra), akkor az $AB^{'}D^{'}$ és $B^{'}CD^{'}$ lapok szöge tompaszög.

1987-02-055-1.eps

5. ábra

III. megoldás. Fektessünk az $ABCDA^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ téglatest A csúcsán át az AC lapátlóra merőleges síkot (6. ábra). Ennek a téglával az $AA^{'}$ éle közös, a test a sík egyik oldalán fekszik. Ennélfogva az $AB^{'}$ és $AD^{'}$ félegyenesek hegyesszöget zárnak be a síkra merőleges AC félegyenessel. Hasonlóan látható be, hogy az utoljára említett két félegyenes is hegyesszöget zár be.

1987-02-055-2.eps

6. ábra

1987-02-055-3.eps

7. ábra

Tükrözzük a téglatestet az $AA^{'}D^{'}D$ és $BB^{'}C^{'}C$ lapok középpontján átmenő tengelyre (7. ábra). Ekkor a $B^{'}AD^{'}\sphericalangle$ és a $CD^{'}A\sphericalangle$ egymásba megy át, tehát ezek egyenlők. Az $ABCD$ és$A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ lapokra merőleges tengelyen át tükrözve kapjuk a $D^{'}CA\sphericalangle$ és $B^{'}AC\sphericalangle$ egyenlőségét. Az $AB^{'}$, AC, $AD^{'}$ lapátlók közti szögek tehát az $ACD^{'}$ háromszög belső szögeivel egyenlők, s így összegük 180°. Ezzel a feltételek szükséges voltát beláttuk.

Legyen most α, β, γ három hegyesszög, amelyek összege 180°. Rajzoljunk a síkban γ szöget bezáró e és f félegyenest, majd egy α nyílásszögű körkúpot e tengellyel és egy β nyílásszögűt f tengellyel. Ezek metszik egymást. Legyen ugyanis a kúpok metszésvonala e és f síkjával g_1, h_1 és g_2, h_2, akkor ezek közül kettő, mondjuk h_1 és h_2, egymás meghosszabbítása, mert a szögek összege 180° (8. ábra). A g_1, h_1 és g_2, h_2 félegyenesek közti szögtartomány nyílásszöge 2α, ill. 2β.

1987-02-056-1.eps

8. ábra

Mivel

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ - 2\gamma > 180^\circ,$$

így a két szögtartomány átfedi egymást. Közös részük mindkét kúpban benne van, azok tehát valóban metszik egymást. Egyik metszésvonalukat g-vel jelölve, az e, f, g félegyenesek közti szögek γ, β és α.

1987-02-056-2.eps

9. ábra

Jelöljük a félegyenesek közös kezdőpontját 0-val. Legyen g egy ettől különböző pontja D_1. Húzzuk meg D_1-ből az OD_1-gyel e és g síkjában $(f,g)\sphericalangle(=\beta)$ és f és g síkjában $(e,g)\sphericalangle(=\alpha)$ szöget bezáró egyenest (9. ábra). Az előbbinek e-vel, ill. az utóbbinak f-fel való metszéspontja legyen B_1, ill. C. Ekkor az OB_1D_1 és D_1CO háromszög egybevágó, mert a közös $OD_1 = D_1O$ oldalukon levő szögek egyenlők. Így $OB_1 = D_1C$ és $B_1D_1 = CO$. Ekkor viszont a B_1OC háromszög is egybevágó az előbbiekkel, mert

$$B_1OC\sphericalangle = \gamma = OB_1D_1\sphericalangle$$

és a megfelelő szögszárakon levő oldalak egyenlők. Így viszont a CD_1B_1 háromszög is egybevágó az előbbiekkel, mert az utolsó egybevágóságból következik, hogy $CB_1 = OD_1$ és így pl. az OB_1D_1 háromszöggel megfelelő oldalaik egyenlők. Az OB_1CD_1 tetraéder tehát egyenlőoldalú.

Jelöljük a CO, CB_1, CD_1, OB_1, B_1D_1, D_1O élek felezőpontját rendre A, $B^{'}$, $D^{'}$, U, V, W-vel. Ekkor A, $B^{'}$, V, W egy rombusz csúcsai, mert $AB^{'}$ és WV párhuzamos OB_1-gyel és fele akkora, miután az OCB_1, ill. OD_1B_1 háromszög középvonala. Így egy síkban vannak és egy paralelogramma csúcsai. Ezen felül AW a COD_1 háromszög középvonala, tehát félakkora, mint CD_1, ami meg OB_1-gyel egyenlő. Így a paralelogramma valóban rombusz, tehát AV és$B^{'}W$ átlói merőlegesek és felezik egymást. Hasonlóan látható, hogy $AUVD^{'}$ és $B^{'}D^{'}WU$ is rombusz, így AV, $B^{'}W$ és $D^{'}U$ páronként merőlegesek és felezőpontjuk közös; jelöljük ezt $A^{'}$-vel.

Az $A^{'}$ pontból az $AB^{'}D^{'}$ háromszög oldalai derékszögben látszanak. Legyen B, $C^{'}$, ill. D az a pont, amire $AA^{'}B^{'}B$, $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$, ill. $AA^{'}D^{'}D$ paralelogramma. Mivel ezek a paralelogrammák téglalapok, az $ABCDA^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ paralelepipedon téglatest. Ennek $AB^{'}$, AC, $AD^{'}$ lapátlói rendre OB_1, OC, OD_1-gyel párhuzamosak, így a köztük levő szögek az adott szögek. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. 1. Azok a versenyzők, akik számolásmentes utat követtek a feladat megoldásában, az elégségesség bizonyításánál többnyire adottnak tekintettek három egy pontból induló, nem egy síkban fekvő félegyenest, amelyek közti szögek hegyesszögek és összegük 180°. Ekkor nem is használták azt a feltételt, hogy a szögek hegyesszögek. Valójában ez éppen annak a belátásához kell, hogy tetszés szerinti három hegyesszöghöz, amelyek összege 180°, van három olyan félegyenes, amelyek éppen ekkora szöget zárnak be. Emögött pedig az rejlik, hogy egy háromél élei közti szögek közül bármelyik kettő összege nagyobb a harmadiknál.

2. A megoldás gondolatmenetével tetszés szerinti tetraéderre belátható, hogy a szemközti élpárok felezőpontjait összekötő szakaszoknak – a tetraéder középvonalainak – közös a felezőpontja. A középvonalak a tetraéder bennfoglaló paralelepipedonjának egy csúcsból induló éleivel párhuzamosak és egyenlők. Így akkor és csak akkor merőlegesek páronként, ha a tetraéder egyenlőoldalú.