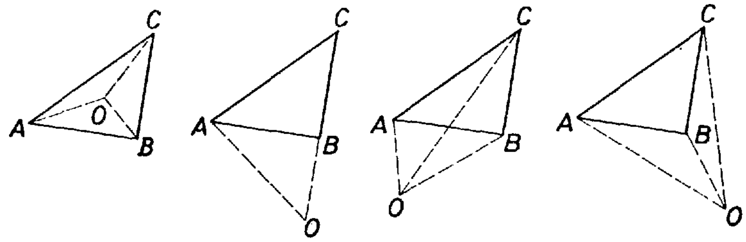
I. megoldás. Egy ABC háromszög területét tekintsük pozitívnak vagy negatívnak aszerint, amint a háromszöget a csúcsok megadott sorrendje szerint körüljárva, az óramutató járásával ellentétes vagy azzal egyező irányban haladunk.



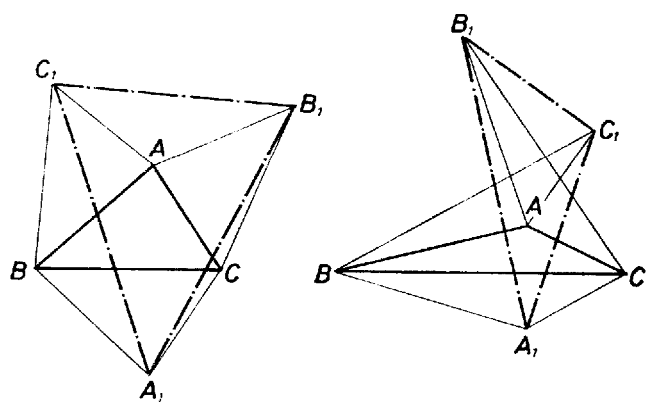
1. ábra

Ekkor végignézve a lehetséges eseteket (1 . ábra) látjuk – a háromszögek területét ugyanúgy jelölve, mint magát a háromszöget – , hogy a háromszög síkjának egy tetszés szerinti O pontjára fennáll a következő összefüggés:

$$ABC = OAB + OBC + OCA. \tag{1}$$

Ha valamelyik három pont egy egyenesre esik, akkor a keletkező, egyenesszakasszá fajult „háromszög” területén természetesen 0-t értünk.

Feladatunkra térve legyen ABC egy tetszés szerinti háromszög pozitív körüljárásnak megfelelően betűzve. Jelöljük a csúcsok tükörképeit a velük szemközti oldal egyenesére rendre A_1, B_1, ill. C_1-gyel (2. ábra).



2. ábra

Az $A_1B_1C_1$ háromszög területét az eredeti háromszögével, tükörképeiével, továbbá az A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 oldalakhoz csatlakozó egy-egy háromszög területével akarjuk kifejezni. Ehhez alkalmazzuk először (1)-et az $A_1B_1C_1$ háromszögre, O-nak az A pontot választva:

$$A_1B_1C_1 = AA_1B_1 + AB_1C_1 + AC_1A_1.$$

Alkalmazzuk most (1)-et a jobb oldal első és harmadik tagjára, O-nak C-t, ill. B-t választva:

$$AA_1B_1 = CAA_1 + CA_1B_1 + CB_1A$$
$$AC_1A_1 = BAC_1 + BC_1A_1 + BA_1A.$$

Végül még a $CABA_1$ négyszöget kellene az eredeti háromszögre és tükörképére bontani. Ehhez alkalmazzuk (1)-et pl. a CAA_1 háromszögre, O-nak B-t választva:

$$CAA_1 = BCA + BAA_1 + BA_1C.$$

Adjuk össze egyenleteink bal és jobb oldalait, hagyjuk el a mind a két oldalon előforduló tagokat, továbbá a BA_1A és BAA_1 tagokat, mert ezek összege 0, hiszen ugyanannak a háromszögnek a területéről van szó egyszer pozitív, egyszer negatív előjellel. Így a következő egyenlőséghez jutottunk:

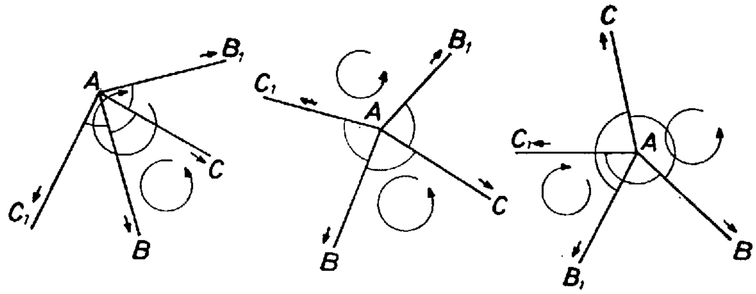
$$A_1B_1C_1 = AB_1C_1 + CA_1B_1 + CB_1A + BAC_1 + BC_1A_1 + BCA + BA_1C.$$

Itt az utolsó előtti tag az eredeti háromszög területe és vele egyenlő a harmadik, a negyedik és az utolsó tag is. Ezek ugyanis a tükrözött háromszögek területei. A tükrözés ugyan megváltoztatja a körüljárás irányát, de mindhárom esetben megfordult a betűzés sorrendje is.

Meg kell még vizsgálnunk a fennmaradt háromszögeket. Ezeknek egy-egy csúcsa közös az eredeti háromszöggel, és a körül az eredeti háromszög megfelelő szögének a háromszorosa keletkezik, de hol a háromszögön belül, hol azon kívül. Az ebből a csúcsból induló oldalak az eredeti háromszög egy-egy oldalával egyenlők. Vizsgáljuk meg közelebbről pl. az AB_1C_1 háromszöget.

Az oldalakra

$$AB_1 = AB, \qquad AC_1 = AC.$$



3. ábra

A közbezárt szögre – $BAC\sphericalangle = \alpha$ jelöléssel – aszerint, hogy α 0° és 60°, vagy 60° és 120°, vagy 120° és 180° közé esik, a $B_1AC_1\sphericalangle$ értéke (3. ábra) 3α, $360° - 3\alpha$, ill. $3\alpha - 360°$. A háromszög kétszeres területét mint két oldalnak és a közbezárt szög szinuszának a szorzatát írva, $2AB_1C_1$ abszolút értékére a három esetnek megfelelően

$$AB \cdot AC \ \sin\ 3\alpha, \qquad AB \cdot AC \ \sin(360° - 3\alpha) = -AB \cdot AC \ \sin\ 3\alpha,$$

ill.

$$AB \cdot AC \ \sin(3\alpha - 360°) = AB \cdot AC \ \sin\ 3\alpha$$

adódik.

A háromszög körüljárási iránya viszont éppen a második esetben pozitív, az elsőben és a harmadikban negatív, így előjellel is helyesen adja meg a háromszög területét mind a három esetben a

$$2AB_1C_1 = -AB \cdot AC \sin 3\alpha$$

egyenlőség. Természetesen a megfelelő egyenlőség érvényes a másik két háromszögre. Jelöljük az eredeti háromszög területét t-vel, a tükrözéssel keletkezettét t_1-gyel, a háromszög másik két szögét a szokott módon β-val és γ-val, akkor végül is a következő összefüggéshez jutottunk:

$$2t_1 = 8t - AB \cdot AC \sin 3\alpha - BC \cdot BA \sin 3\beta - CA \cdot CB \sin 3\gamma.$$

Azt kell belátnunk, hogy ez $-10t$ és $10t$ közé esik. Osszuk el mindkét oldalt $2t$-vel, a jobb oldal második, harmadik és negyedik tagja esetében azt is a megfelelő két oldal és a közbezárt szög szinusza szorzataként írva, akkor a

$$\frac{2t_1}{2t} = 4 - \frac{\sin\ 3\alpha}{\sin\ \alpha} - \frac{\sin\ 3\beta}{\sin\ \beta} - \frac{\sin\ 3\gamma}{\sin\ \gamma}$$

arányról kell belátnunk, hogy -5 és 5 közötti érték.

Felhasználva a könnyen igazolható

$$\sin\ 3\varphi = 3\ \sin\ \varphi - 4\ \sin^3\varphi$$

azonosságot, a jobb oldal a következőképpen is írható:

$$4(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) - 5.$$

Ebből az alsó becslés érvényessége nyilvánvaló, és az is látható, hogy az arány nem éri el a -5 értéket, de ahhoz tetszés szerint közel lehet, ha az egyik szög csak kevéssel kisebb 180°-nál, a másik kettő pedig ennek megfelelően nagyon kicsi.

Felső becsléshez alkalmazzuk 2 tagra a

$$2\ \sin^2\varphi = 1 - \cos\ 2\varphi,$$

majd a

$$\cos 2\varphi + \cos 2\psi = 2\cos(\varphi + \psi)\cos(\varphi - \psi)$$

összefüggést:

$$2\ \sin^2\alpha + 2\ \sin^2\beta = 2 - \cos\ 2\alpha - \cos\ 2\beta = 2 - 2\ \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) =$$
$$= 2 + 2\ \cos\gamma\cos(\alpha - \beta),$$

mert $\alpha+\beta=180^\circ-\gamma$. Fejezzük még ki $\sin^2\gamma$-t $\cos\gamma$-val, akkor a becsülendő kifejezés így alakítható tovább:

$$4(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)-5=3+4\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)-4\cos^2\gamma=$$
$$=3+\cos^2(\alpha-\beta)-\big(2\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)\big)^2.$$

Ez a kifejezés nem nagyobb, mint 4. Egyenlő akkor lehet vele, ha $\cos^2(\alpha-\beta)=1$, a kivonandó pedig 0. Mivel a szereplő szögek 180°-nál kisebbek, ez azt jelenti, hogy

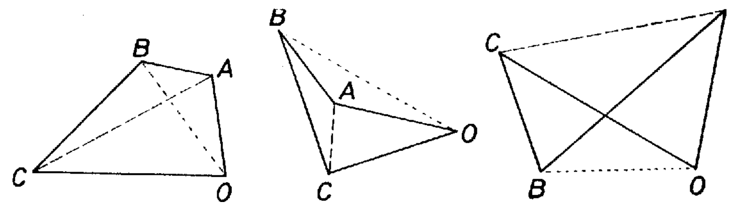
$$\alpha=\beta \qquad \text{és} \qquad \cos\gamma=\frac{1}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad \gamma=60^\circ,$$

tehát a háromszög szabályos.

Eredményeinket összefoglalva a bizonyítandó állításon kicsit túlmenően azt láttuk be, hogy a t_1 előjeles terület $-5t$ és $4t$ között változik. Az alsó határt nem éri el, de ahhoz tetszés szerint közel lehet, a felső határt viszont eléri, éspedig egyedül a szabályos háromszög esetén.

Megjegyzés. A megoldás során alkalmazott területátalakítások közt szerepelt egy négyszög területének kétféle felosztása háromszögekre is. Ennek – az $ABCD$ négyszög esetén – az felel meg, hogy (1) mindkét oldalához hozzáadjuk az ACO területet. Ez a jobb oldal utolsó tagjával 0-t ad, így

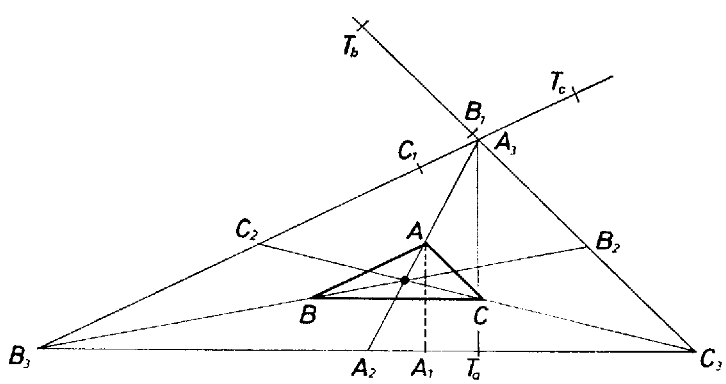
(2) $$ABC+ACO=OAB+OBC.$$



4. ábra

Megjegyezzük, hogy ezzel nemcsak konvex, hanem még hurkolt négyszöghöz is rendeltünk területet (4. ábra), vagyis olyanhoz, amelyiknek az oldalai metszik egymást a csúcsoktól különböző pontban is. Ez a hozzárendelt érték a csúcsok megnevezési sorrendjében történő körüljárás során pozitív irányban körüljárt rész területéből kivonva a negatív irányban körüljárt rész területét. A (2) összefüggés szerint ez esetben is mind a két lehetséges „felosztás" háromszögekre ugyanarra a területértékre vezet.

II. megoldás. Használjuk továbbra is az első megoldás jelöléseit. Tükrözzük a háromszög csúcsait a szemközti oldalszakaszok felezőpontjára is, a tükörképek legyenek A_2, B_2, C_2. Az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek párhuzamosak rendre a háromszög BC, CA, AB oldalaival, így egy ahhoz hasonló $\mathcal{H}'$ háromszöget alkotnak. Ezt a háromszöget az eredetiből úgy kaphatjuk meg, hogy azt a súlypontjából négyszeresére nagyítjuk. Valóban, ez a nagyítás az oldalfelező pontokat az A_2, B_2, C_2-be viszi át – mivel a súlypont harmadolja a súlyvonalakat – , a háromszög oldalegyeneseit pedig párhuzamos egyenesekbe (5. ábra).



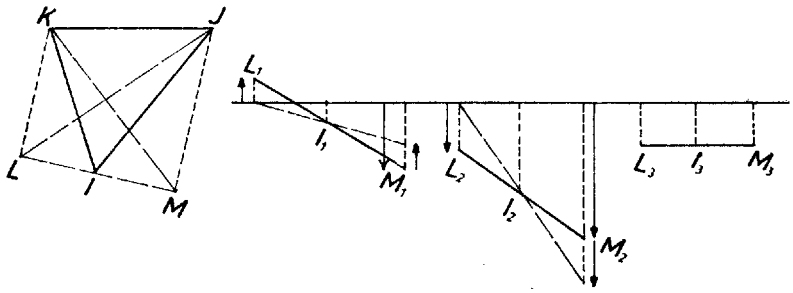
5. ábra

Az A_1A_2 szakasz megkapható úgy, hogy a BC oldal felezőpontja és a magasság talppontja közti szakaszt A-ból kétszeresére nagyítjuk. $\mathcal{H}'$-ben viszont az A_2 oldalfelező pont és a magasságtalppont közti szakasz négyszer akkora, mint az eredeti háromszögben, tehát A_1 $\mathcal{H}'$-ben az oldalfelező pont és a magasságtalppont közti szakasz felezőpontja.

Észrevételünket a következő egyszerű segédtétel ismételt alkalmazásával fogjuk hasznosítani: Legyen az IJK háromszög síkjának tetszés szerinti pontja L, és L tükörképe I-re M. Ekkor

(3) $$IJK=\frac{1}{2}(LJK+MJK).$$

Mérjük a JK egyenestől a távolságot előjelesen úgy, hogy az I-t tartalmazó félsík pontjainak a távolsága legyen olyan előjelű, mint az IJK körüljárási irány, a másik félsíkban levő pontoké pedig ellenkező előjelű. Ekkor a háromszögek területe úgy számítható, mint a KJ távolság szorozva a hozzá tartozó magassággal, a magasságokra pedig érvényes a megfelelő összefüggés (6. ábra).



6. ábra

Jelöljük $\mathcal{H}'$-ben az A_1, B_1, C_1-et tartalmazó oldalakon levő magasság talppontokat rendre T_a, T_b, T_c-vel, a háromszög csúcsait pedig A_3, B_3, C_3-mal. Ekkor, kétszer alkalmazva (3)-at

$$
\begin{aligned}
t_1 = A_1B_1C_1 &= \frac{1}{2}(A_2B_1C_1 + T_aB_1C_1) = \\
&= \frac{1}{4}(A_2B_2C_1 + A_2T_bC_1 + T_aB_2C_1 + T_aT_bC_1).
\end{aligned}
$$

Itt $A_2B_2C_1 = A_2B_2C_2$, mert C_1C_2 párhuzamos A_2B_2-vel, az utóbbi háromszög pedig az ABC háromszög kétszeres nagyítása, területe tehát $4t$. A többi háromszöget (3) alapján tovább bontva

$$t_1 = t + \frac{1}{8}(A_2T_bC_2 + A_2T_bT_c + T_aB_2C_2 + T_aB_2T_c + T_aT_bC_2 + T_aT_bT_c).$$

Itt az első és a harmadik tag ismét $A_2B_2C_2$-vel egyenlő, mert $T_bB_2 \parallel A_2C_2$ és $T_aA_2 \parallel B_2C_2$. Az utolsó tag a háromszög talpponti háromszögének területe, ez az eredeti háromszög t_0 talpponti háromszöge területének 16-szorosa. A maradó három háromszög egy-egy csúcsa oldalfelezőpont, így ezeket tovább alakíthatjuk (3) alapján:

$$t_1 = 2t + 2t_o + \frac{1}{16}(B_3T_bT_c + C_3T_bT_c + T_aC_3T_c + T_aA_3T_c + T_aT_bA_3 + T_aT_bB_3).$$

A zárójel első és utolsó tagja, továbbá a maradó két-két szomszédos tagpár egy-egy négyszög területét adja. Ezeket (2) alapján a másik átlójukkal osztva ketté,

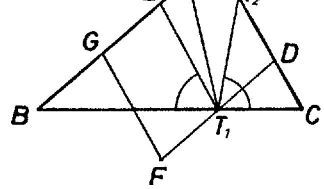
$$
\begin{aligned}
B_3T_aT_b + B_3T_bT_c &= T_cB_3T_a + T_cT_aT_b, \\
C_3T_bT_c + C_3T_cT_a &= T_aC_3T_b + T_aT_bT_c, \\
A_3T_cT_a + A_3T_aT_b &= T_bA_3T_c + T_bT_cT_a.
\end{aligned}
$$

A bal oldalak összege a zárójel 6 tagját adja, a jobb oldalak első oszlopa és egyszer a talpponti háromszög pedig $\mathcal{H}'$-t, aminek a területe $16t$. Kétszer $\mathcal{H}'$ talpponti háromszögéé $32t_0$, így végül a következő összefüggést kaptuk:

$$t_1 = 3t + 4t_0.$$

Az ABC háromszöget pozitív körüljárás szerint betűztük meg, a talpponti háromszög körüljárási iránya azonban hegyesszögű háromszög esetén pozitív, tompaszögű háromszögnél viszont negatív.[1] Azt kell tehát belátnunk, hogy t_0 értéke $t/2$ és $-2t$ közé esik.

Hegyesszögű ABC háromszögnek legyen az A-nál levő szöge a legnagyobb vagy a legnagyobbak egyike. A BC, CA, AB oldalakon levő magasságtalppont legyen rendre T_1, T_2, T_3. A T_1-en át AB-vel és AC-vel húzott párhuzamosak a T_1DAE paralelogrammát metszik ki a háromszögből (7. ábra). Ez tartalmazza a talpponti háromszöget. Ez azért igaz, mert ABT_1T_2 és ACT_1T_3 húrnégyszög, s így mindkettő T_1-nél levő külső szöge a BAC $\sphericalangle$-gel egyenlő, a két párhuzamos tehát az egyiknek, ill. a másiknak a szögteréhez tartozik. Ekkor azonban T_2 az AD, T_3 az AE szakaszon van.

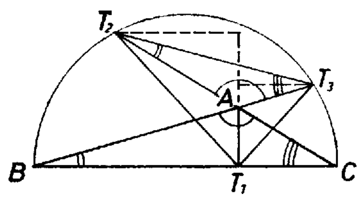


[1] A derékszögű háromszögnél két magasságtalppont egybeesik a derékszögű csúcsban, így $t_0 = 0$, tehát ezekre t_1 mindig $3t$, amit könnyű közvetlenül belátni.(Ez a tény vezetett egyébként a feladathoz.)

7. *ábra*

Legyen $T_1 \leqq T_1B$. Ekkor mérjük rá DT_1 meghosszabbítására a vele egyenlő T_1F szakaszt. Az F-en át T_1E-vel párhuzamosan húzott egyenes messe AB-t G-ben. Az $ADFG$ paralelogrammának a háromszögön túlnyúló része egybevágó a T_1CD háromszöggel, így a paralelogramma területe nem nagyobb a háromszögénél. A T_1DAE paralelogramma és az általa tartalmazott talpponti háromszög területe tehát nem nagyobb, mint $t/2$.

Ha az ABC háromszögben A-nál tompaszög van, akkor a talpponti háromszög $T_1T_2T_3$ sorrendben történő körüljárása ellenkező irányú, mint az ABC háromszögé. (8. ábra).



8. *ábra*

A terület abszolút értékét nézve a T_2AT_3 háromszög hasonló BAC-hez és kisebb nála, mert az utóbbinak az egyik oldala a kör átmérője. Az AT_2T_1, AT_3T_1 háromszögek területe kisebb a velük közös oldalú ABT_1, ill. ACT_1 háromszögekénél, mert a közös oldalhoz tartozó magasságok az utóbbi háromszögekben nagyobbak. Ebben az esetben tehát a talpponti háromszög területe kisebb a háromszög területének kétszeresénél. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Ez a megoldás is szolgáltatja az I. megoldásban nyert pontosabb eredményt. Egy paralelogrammába írt háromszög területe ugyanis nem nagyobb, mint a paralelogramma területének a fele és akkora csak úgy lehet, ha a háromszög két csúcsa a paralelogramma két szomszédos csúcsa, a harmadik csúcs pedig az ezek közti oldallal szemközti oldalon van. Ebből következik, hogy hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének a területe nem nagyobb a háromszög területének a negyedénél, és könnyen látható, hogy egyenlő egyedül a szabályos háromszög esetén lesz.

Tompaszögű háromszög esetében viszont látható a bizonyításból, hogy a talpponti háromszög területe közel lehet $2t$-hez, ha T_2 és T_3 közel van B-hez, ill. C-hez, de azt nem érheti el.

2. Megoldhatjuk a feladatot koordinátageometria segítségével is. Választhatjuk pl. a BC oldal egyenesét X-tengelynek és az A-ból rábocsátott merőlegest Y-tengelynek. Célszerű továbbá a B-ből és C-ből induló magasságok talppontjai koordinátáival fejezni ki B és C tükörképét. Ezúton eljuthatunk akár az I., akár a II. megoldásban nyert területformulához.

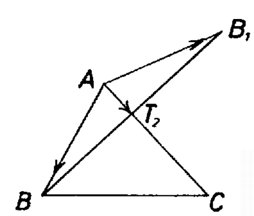
3. Azok számára, akik ismerik a vektorok vektoriális szorzatát, vázolunk egy ezt felhasználó megoldást. A $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektor vektoriális szorzatán, $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$-n azt a vektort értjük a térben, amelyiknek hossza a vektorok meghatározta paralelogramma területe, iránya merőleges a két vektor síkjára és annak arra az oldalára mutat, amelyikről nézve $\mathbf{v}_1$ pozitív irányban forgatható $180°$-nál kisebb szöggel $\mathbf{v}_2$-be. Ez a művelet nem kommutatív, hiszen a tényezők felcserélésével előjelet vált. Előjelet vált a szorzat akkor is, ha az egyik vektort az ellentettjével helyettesítjük. Ennek megfelelően, ha mindkét vektor előjelét megváltoztatjuk, vagy az egyik előjelét változtatjuk és a tényezőket megcseréljük, akkor a vektoriális szorzat értéke nem változik. Azt kell még tudni róla, hogy disztributív:

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + v_1 \times \mathbf{v}_3 \quad \text{és} \quad (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \times \mathbf{v}_1 = v_2 \times \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1.$$

Az $A_1B_1C_1$ háromszög kétszeres területét az $\overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{A_1C_1}$ szorzat adja. A tényezőket így határozhatjuk meg:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CA_1} = 2(\overrightarrow{CT_2} - \overrightarrow{CT_1}) + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{T_1T_2} + \overrightarrow{BA},$$

mert pl. $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CT_1}$ (9. ábra).



9. *ábra*

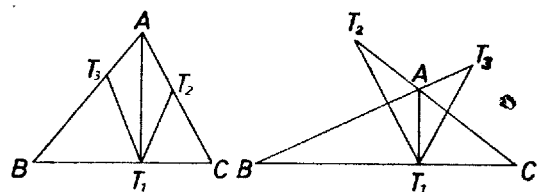
Hasonlóan $\overrightarrow{A_1C_1} = 2\overrightarrow{T_1T_3} + \overrightarrow{CA}$, és így a kettőt tagonként összeszorozva $2t_1$ -et a következő vektorok előjeles hosszának összege adja – az $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$-vel egy irányba mutató vektorok hosszát tekintve pozitívnak, az azzal ellentétes irányúakét negatívnak –

$$4\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_1T_3} + 2\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{T_1T_3} + \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{CA}.$$

Az első tag $8t_0$, az utolsó $2t$. A közbülső kettőben az oldalt a rajta levő talpponttal osztva a

$$\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{CT_2} + \overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_2A} + \overrightarrow{BT_3} \times \overrightarrow{T_1T_3} + \overrightarrow{T_3A} \times \overrightarrow{T_1T_3}$$

összeg kétszeresét kapjuk. Az összeg egyes tagjai a T_2T_1C, T_2AT_1, T_3BT_1, T_3T_1A háromszögek kétszeres területét adják, ezeknek az összege pedig az ABC háromszög területe (10. ábra). Ezeket figyelembe véve a $t_1 = 4t_0 + 3t$ formulához jutunk.



10. ábra

A koordinátákkal felírható területformula tagjait alkalmasan csoportosítva ugyanezeknek a háromszögeknek a területeit ismerhetjük fel.

4. Volt, aki az A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 oldalak négyzetét fejezte ki az oldalakkal, és a szögek háromszorosaival, és helyettesítette be a Heron–formulába. Ezen az úton is el lehet jutni – elég fáradságosan – az I. megoldás formulájához.