**Megoldás.** A $2^k+2$ számok, ahol $k$ 1-nél nagyobb egész szám, megfelelnek. Valóban, 2-nek nyilván a $k$-adik hatványa szerepel a hatványösszegben; továbbá van a számnak legalább egy páratlan $p$ prím osztója, mert a szám fele 1-nél nagyobb páratlan szám. Igy a hatványösszeg legalábbis $2^k+p$, ami nagyobb $2^k+2$-nél.

*Megjegyzés.* Az olvasóra bízzuk annak belátását, hogy a következő számsorozatok is megfelelnek:

$2p^k$, ahol $p$ egy (rögzített) páratlan prímszám, $k$ pedig pozitív egész.

$3\cdot 2^k$, $k=1,2,\dots$.

6-nak a 2 hatványait követő legkisebb többszörösei. Hasonlóan megfelelnek 10-nek a 2 ötödiknél magasabb hatványait követő többszörösei is.

A páratlan prímszámok kétszeresei. Itt természetesen felhasználjuk már azt, hogy végtelen sok prímszám van (és ezek a 2 kivételével páratlanok).

A 30 többszörösei.

Az utolsó választás megfelelő volta abból adódik, hogy ha egy $n$ szám osztható a $p$ prímszámmal, és a hatványösszegben $p^k$ szerepel, ez azt jelenti, hogy

$$p^k \leqq n < p^{k+1}.$$

Innen

$$p^k > \frac{n}{p}.$$

Ha tehát $n$ osztható 30-cal, akkor a 2, 3 és 5 adaléka a hatványösszeghez több, mint

$$\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{5}=\frac{31}{30}n.$$

Ismeretes az is, hogy a prímszámok reciprok értékeinek az összege tetszés szerinti nagy lehet, ha elég sok prímszámot veszünk.[1] Ez esetünkben azt is adja, hogy a hatványösszeg nemcsak a számnál, hanem annak tetszés szerint adott többszörösénél is végtelen sok számra nagyobb lehet.

[1] Lásd pl. *Erdős P.–Surányi J.:* Válogatott fejezetek a számelméletből,Tankönyvkiadó, Budapest,1960. 114–122.old. (Itt 3 bizonyítás is található.)