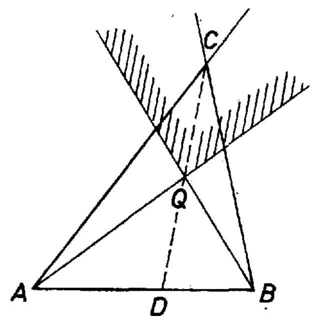
I. megoldás. A megoldáshoz a feltételt átfogalmazzuk. Megmutatjuk a következőt: *Ha A, B és Q nem egy egyenesen levő pontok, akkor síkjuknak azokra és csak azokra a C pontjaira tartalmazza az ABC háromszög belsejében a Q pontot, amelyek az AQB konvex szög csúcsszög-tartományának belsejében vannak* (1. ábra).



1. ábra

Valóban, ha Q a háromszög belsejében van, akkor C az AQ egyenesnek a B-t nem tartalmazó partján van, a BQ egyenesnek pedig az A-t nem tartalmazó partján. Így C a két félsík közös részében, tehát az állításban szereplő szögtartományban van. A konvex szögtartományról van szó, tehát arról, amelyik bármely két pontjával azok összekötő szakaszát is tartalmazza, miután a félsík konvex tartomány és konvex tartományok közös része is konvex.

Fordítva, ha C a mondott szögtartományban van, akkor a CQ egyenes Q-n túli meghosszabbítása metszi az AB szakaszt egy belső D pontjában. A CD szakasz az ABC háromszögben van, tehát annak Q belső pontja a háromszög belső pontja.

A feladatra térve a P_1Q egyenes egyik, mondjuk jobb partján levő pontok számát (P_1-et nem számítva) jelöljük r-rel, a bal parton levőket s-sel. A jelölést, ha kell, változtassuk meg úgy, hogy a jobb parton a $P_2, \ldots, P_{r+1}$ pontok legyenek, mégpedig úgy, hogy

$$P_1QP_2\sphericalangle < P_1QP_3\sphericalangle < \ldots < P_1QP_{r+1}\sphericalangle < 180^\circ$$

teljesüljön.

A P_iQ és $P_{i+1}Q$ félegyenes Q-n túli félegyenesei közti szögtartományok a bal parton vannak és a különböző i-khez tartozóknak nincs közös pontjuk. Minden ilyen tartományban van legalább egy a bal parti pontok közül, mert a P_i, P_{i+1}-hez megfelelő P_k pontoknak segédtételünk szerint itt kell lenniük. A szögtartományok száma r, így

$$r \leq s.$$

A bal és jobb part szerepét felcserélve ugyanígy azt nyerjük, hogy

$$s \leq r.$$

Így az összes P_i pontok száma:

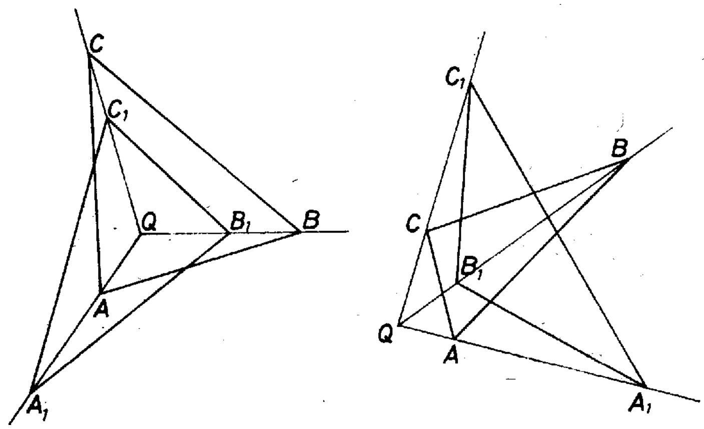
$$n = r + s + 1 = 2r + 1,$$

tehát páratlan szám, és ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzések. 1. A versenyzők túlnyomó része a megoldásban szereplő lemmát sok más, általában nem ilyen ügyes módon használta fel.

a) Sokan egy egyenest forgattak a Q pont körül és annak két félegyenesét pirosra, ill. zöldre festettnek gondolva megállapították, hogy forgatás közben felváltva egyszer a piros, legközelebb a zöld félegyenes halad át egy-egy P_i ponton. 180°-os elforgatás után ér vissza az egyenes először egy már érintett P_i ponthoz, de ezen most az egyenes másik félegyenese halad át, mint a kiindulásnál, ezért ezzel a másodszor érintett ponttal együtt összesen páros számú ponton halad át az egyenes, másrészt $n+1$-en, tehát n páratlan.

b) Mások azt vették észre, hogy a feladat feltételei nem változnak, ha a P_i pontokat a Q-ból induló, rajtuk átmenő félegyenesen elmozdítjuk, hiszen ha A és A_1, B és B_1, C és C_1 egy-egy Q-ból induló félegyenesen van, akkor az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszöget nézve, vagy mindkettő belsejében tartalmazza Q-t, vagy egyik sem (2. ábra). Ennek alapján egy Q középpontú körre helyezték át a P_i pontokat. Ha a kör P_i-vel átellenes pontját R_i-vel jelöljük, akkor megállapították, hogy a kör mentén haladva felváltva következik egy P és egy R pont. A P pontok száma helyett az átmérőket számolták össze egy félkörre eső végpontjaik szerint. Ha a P_1 ponttal kezdjük a megszámlálást, akkor egy P ponttal is fejezzük be, mert R_1 az első pont, amit már nem számolunk. Ebből ismét következik n páratlan volta.



2. ábra

2. A versenyzők a segédtételt általában szemlélet alapján mondták ki. Ezt a bizottság nem tekintette hibának.

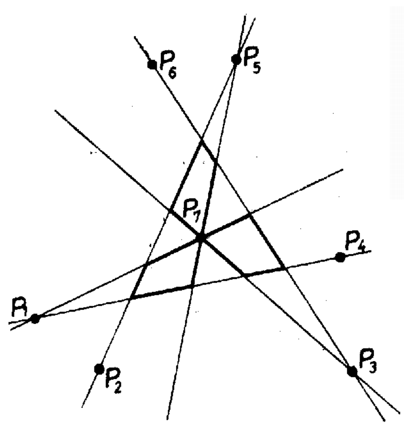
3. Többen megjegyezték, hogy a bizonyításban csak annyit használtunk ki, hogy egy P_i, egy P_j pont és Q nincs egy egyenesen, elég lett volna tehát ennyit feltételezni. Azt azonban már nem vették észre, hogy ezt meg nem kell külön feltenni, hiszen ha valamilyen i-re és j-re ez volna a helyzet, akkor semmilyen k-ra nem tartalmazhatná a $P_iP_jP_k$ háromszög belsejében a Q-t, tehát nem teljesülhetne a feladat másik feltétele.

4. Sokan megjegyezték, hogy minden páratlan n-re van a feltételeket kielégítő pontrendszer, pl. egy szabályos n-szög csúcsait választjuk P_i pontoknak és a középpontját Q-nak.

Többen felvetették azt a kérdést, hogy ha megadunk tetszés szerint páratlan számú pontot a síkban, van-e hozzájuk olyan Q pont, amivel teljesülnek a feladat feltételei. A közölt megoldás felhasználásával megmutatjuk, hogy a kérdésre tagadó a válasz.

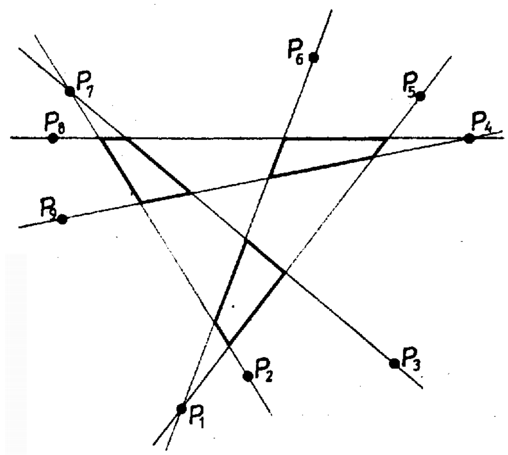
A bizonyítás azt adta, hogy a P_1Q egyenes egyik és másik partján ugyanannyi P_i pontnak kell lennie. Itt P_1 helyett bármelyik P_i pontot vehettük volna. Azt bizonyítottuk tehát, hogy *ha a feladat feltételei teljesülnek, akkor mindegyik P_iQ egyenes egyik és másik partján ugyanannyi P_j pont van.*

Ha most 3 nem egy egyenesen levő pont van adva, akkor az általuk meghatározott háromszög minden belső pontja választható Q-nak. Nem nehéz belátni azt sem, hogy ha 5 pont van a síkban, azokhoz is található megfelelő Q pont. Ha azonban 7 pontot pl. a 3. ábrán látható módon adunk meg, akkor nem található hozzájuk megfelelő Q pont.



3. ábra

Valóban, Q a feladat feltételeinek fent megfogalmazott következménye szerint olyan kell hogy legyen, hogy pl. a QP_1 egyenes mindkét partján 3–3 P_i pont legyen. Ez csak a $P_4P_1P_7$ szögtartomány belsejében levő pontokra teljesül. Hasonlóan benne kell lennie Q-nak a $P_6P_3P_7$ és a $P_2P_5P_7$ szögtartomány belsejében is. A 3 szögtartománynak azonban egyetlen közös pontja P_7, és az is határpontja mindegyiknek, tehát nincs megfelelő Q pont.



4. ábra

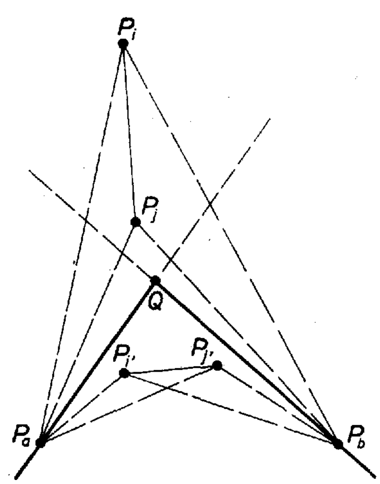
A 4. ábra 9 pontja közt 3 olyan szögtartományt jelöltünk meg, amelyeknek még közös határpontjuk sincs, viszont ha volna alkalmas Q pont, annak mindegyik belsejében kellene lennie.

A következő megoldás a pontok megszámlálása helyett visszavezeti a problémát egy 2-vel kevesebb pontból álló rendszer esetére.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy *ha egy* P_1, P_2, ... P_n, Q *pontrendszerre teljesülnek a feladat feltételei, akkor minden* P_a *ponthoz található olyan* P_b *pont, hogy az e két pont elhagyása után visszamaradó pontrendszerre is teljesülnek.* Ebből már következik, hogy n csak páratlan lehet, hiszen ha $n > 3$, n pont közül pontpárok elhagyásával eljuthatunk páratlan számú pont esetén 3, páros számú n esetén 2 pontból álló rendszerhez, amelyre szintén teljesülnek a feladat feltételei. De 2 pont, P_1 és P_2 esetén nem teljesülhetnek, hiszen egyáltalán nem választható hozzájuk egy harmadik P_h pont, így semmilyen páros n-re sem teljesülhetnek a feltételek. n tehát csak páratlan lehet.

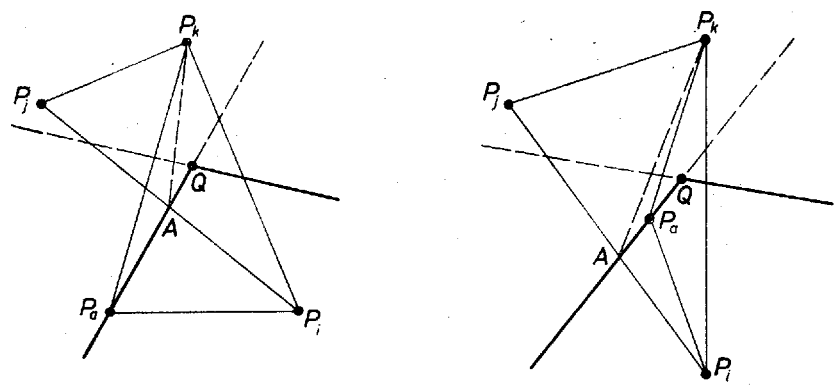
Teljesüljenek a P_1, P_2, ..., P_n, Q pontokra a feladat feltételei. Kiválasztva tetszés szerint egy P_a pontot, forgassuk a P_aQ egyenest Q körül valamelyik irányban, míg egy újabb P_b ponthoz nem ér. Nevezzük a P_i pontokból P_a és P_b elhagyásával visszamaradó pontrendszert $\mathcal{D}$-nek. Mivel P_b volt az első pont, amibe a forgatott egyenes P_a elhagyása után beleütközött, a P_aQ és P_bQ egyenesek közti 4 szögtartomány közül egy csúcsszögeket alkotó párban nincs további P_i pont. Az I. megoldásban bizonyított segédtétel szerint a P_a, P_b-hez megfelelő P_k pontok a P_aQ és P_bQ szakaszok Q-n túli meghosszabbításai közti konvex szögtartomány belsejében vannak. Így ez és a P_aQP_b szögtartomány tartalmazza $\mathcal{D}$-t.

Legyen P és P_j $\mathcal{D}$-nek két pontja. Ha ugyanabban a szögtartományban vannak, akkor sem a $P_iP_jP_a$, sem a $P_iP_jP_b$ háromszög nem tartalmazza Q-t (5. ábra), tehát a P_i, P_j-hez megfelelő P_k pontok $\mathcal{D}$-hez tartoznak.



5. ábra

Ha P_i a P_aQP_b szögtartományban van, P_j a csúcsszög-tartományban, akkor feltehetjük, hogy a P_iP_j szakasz a QP_a félegyenest metszi egy A pontban. Legyen P_k olyan pont, amelyre $P_iP_aP_k$ tartalmazza Q-t (6. ábra).



6. ábra

Mivel A a Q-ból induló QP_a félegyenesen van, a P_iAP_k háromszög is tartalmazza Q-t. Az utóbbi háromszög része a $P_iP_jP_k$ háromszögnek, így ez is tartalmazza Q-t, tehát P_k a P_i, P_j pontpárhoz is megfelelő harmadik pont. P_k a $\mathcal{D}$ pontrendszer pontja, hiszen mint P_i és P_a-hoz megfelelő pont, az I. megoldás segédtétele szerint a P_aQP_i szögtartomány csúcsszög-tartományában van, és így a P_aQP_b szögtartományon kívül; P_k tehát különbözik P_a-tól és P_b-től. Ezzel beláttuk a megoldás elején megfogalmazott állítást és így a feladat állítását is.