1. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha az x, y, z racionális számokra*

$$x^3+3y^3+9z^3-9xyz=0$$

teljesül, akkor $x=y=z=0$.

I. megoldás. Az $x=y=z=0$ értékhármas nyilvánvalóan megoldása az egyenletnek. Ha van ettől különböző megoldás, ahhoz található olyan, 0-tól különböző u racionális szám, amelyikre

$$X=ux,\quad Y=uy\quad \text{és}\quad Z=uz$$

egész szám és 0-tól különböző racionális számhoz 0-tól különböző egész tartozik. (Egy olyan u, amelyiknek a számlálója osztható a racionális számok nevezőivel, nevezője pedig közös osztója a számlálóknak, megfelel). Egyenletünk mindkét oldalát u^3-nal szorozva kapjuk, hogy

$$X^3+3Y^3+9Z^3-9XYZ=0 \tag{1}$$

is teljesül. Elég tehát azt megmutatni, hogy (1)-nek nincs más *egész* megoldása, mint $X=Y=Z=0$.

Válasszunk egy olyan egész számokból álló megoldást, amelyikre $|X|+|Y|+|Z|$ a lehető legkisebb. Ilyen van, mert egy megoldáshoz összesen csak véges sok olyan, egész számokból álló hármas van, amelyikre az abszolút értékek összege nem nagyobb, mint az adott megoldásban. Ezek közül tartsuk meg azokat, amelyeket X, Y, ill. Z helyébe helyettesítve (1) teljesül. Ezek közül kiválasztható egy olyan hármas, amelyikben az abszolút értékek összege minimális.

Ha ebben a megoldásban $X=0$, akkor

$$Y^3+3Z^3=0$$

is fennáll. Ha itt $Z=0$, akkor Y is 0. Nem lehet azonban $Z\neq 0$, mert akkor a

$$3Z^3=-Y^3$$

bal oldalának törzsszámhatványokra történő felbontásában. 3 kitevője egy 3-mal nem osztható szám lenne, a jobb oldal felbontásában viszont 3-mal osztható szám. A számelmélet alaptétele szerint azonban egy egész szám törzsszámhatványokra történő felbontásában minden törzsszám kitevője egyértelműen meg van határozva. Megállapításunk így is fogalmazható: 3 nem köbe racionális számnak, vagy $\sqrt[3]{3}$ irracionális. Ha tehát $X=0$, akkor Y és Z is 0.

Ha $X\neq 0$, akkor

$$X^3=3(3XYZ-Y^3-3Z^3),$$

tehát X^3 osztható 3-mal. De 3-mal nem osztható számnak a köbe sem osztható 3-mal, tehát X-nek is oszthatónak kell lennie 3-mal. $X=3X_1$. Ezt (1)-be beírva és 3-mal osztva, azt kapjuk, hogy

$$Y^3+3Z^3+9X_1^3-9YZX_1=0,$$

azaz Y, Z, $X_1=X/3$ is megoldása (1)-nek. Erre azonban

$$|Y|+|Z|+|X/3|<|X|+|Y|+|Z|,$$

mert $X\neq 0$. Ez viszont nem lehetséges, mert olyan megoldásból indultunk ki, amelyikben az abszolút értékek összege minimális volt. Nem lehet tehát olyan egész számokból álló megoldás, amelyikben $X\neq 0$. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Többen abból az észrevételből indultak ki, hogy

$$3xyz=x\cdot\left(\sqrt[3]{3}y\right)\left(\sqrt[3]{9}z\right)=\sqrt[3]{x^3(3y^3)(9z^3)},$$

tehát az első három tag mértani közepe. Így ha x, y és z pozitív, a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből következtettek a feladat állításának helyességére. Arra az esetre azonban, ha x, y és z közt vannak különböző előjelűek, ez a gondolat nem vihető tovább.

2. Az I. megoldáshoz hasonló utat követő versenyzők vagy azt bizonyították, hogy X-nek, Y-nak és Z-nek 3 akármilyen magas hatványával oszthatónak kell lennie, és ez 0-tól különböző egész számra nem lehetséges, vagy belátták, hogy egy, az $X=Y=Z=0$-tól különböző megoldásról feltehető, hogy relatív prím számokból áll, viszont másrészről mindegyiknek oszthatónak kellene lennie 3-mal, ilyen megoldás tehát nem létezik.

Csak kevesen hivatkoztak a törzsszámhatványokra történő felbontás egyértelműségére, de ennek hiányát a bizottság nem tekintette hibának.

3. A bizonyítás egy érdekes befejezése volt a következő: Ha 3 kitevője X, Y és Z felbontásában a, b, ill. c, akkor (1) egymás utáni tagjaiban 3 kitevője

$$3a,\quad 3b+1,\quad 3c+2,\quad a+b+c+2.$$

Ezek közül az első három különböző, mert 3-mal osztva különböző maradékot adnak. Jelöljük közülük, a legkisebbet m-mel. Ennek a 3-szorosa tehát kisebb a három kitevő összegénél:

$$3m < 3a + 3b + 3c + 3 = 3(a + b + c + 1).$$

Így

$$m < a + b + c + 1 < a + b + c + 2,$$

vagyis m-nél nagyobb a 3 kitevője a negyedik tagban is. Ha tehát (1) mindkét oldalát osztjuk 3^m-nel, akkor a bal oldalon egy tag lesz, amelyik nem osztható 3-mal, tehát a bal oldal nem osztható vele, viszont a jobb oldalon továbbra is 0 áll, ami osztható 3-mal. Ezzel ellentmondásra jutottunk.

Ez a meggondolás felhívja a figyelmet arra, hogy az állítás az

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 3xyz = 0$$

egyenletre is igaz marad. A közölt megoldás is változtatás nélkül alkalmazható erre az egyenletre is. Nem volna viszont alkalmazható a következő megoldás, amire szintén többen rátaláltak.

II. megoldás. Ismeretes és könnyen igazolható a következő azonosság-pár:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) =$$
$$= (a + b + c)\frac{1}{2}\big((a - b)^2 + (b - 2)^2 + (c - a)^2\big).$$

Ide a, b, c helyébe x, $\sqrt[3]{3}y$, $\sqrt[3]{9}z$ értékeket írva a feladatban szereplő egyenlet bal oldala így alakítható át:

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = (x + \sqrt[3]{3}y + \sqrt[3]{9}z)\frac{1}{2}\big((x - \sqrt[3]{3}y)^2 + (\sqrt[3]{3}y - \sqrt[3]{9}z)^2 + (\sqrt[3]{9}z - x)^2\big).$$

Az utolsó tényező csak úgy lehet 0, ha benne mind a 3 tag 0, tehát többek közt

$$x - \sqrt[3]{3}y = 0.$$

Ebből azonban $y = x = 0$ következik, miután $\sqrt[3]{3}irracionlis.Ekkorpedigzis0$.

Marad még az a lehetőség, hogy

(1) $$x + \sqrt[3]{3}y + \sqrt[3]{9}z = 0.$$

Szorozzunk $\sqrt[3]{3}$-mal:

(2) $$3z + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9}y = 0.$$

A két egyenletből küszöböljük ki a $\sqrt[3]{9}$ tartalmazó tagokat, az első egyenlet bal oldalának y-szorosából a másodikénak z-szeresét levonva:

$$(xy - 3z^2) + \sqrt[3]{3}(y^2 - zx) = 0.$$

Miután $\sqrt[3]{3}$ irracionális, ez racionális x, y, z-vel csak úgy teljesülhet, ha

$$xy - 3z^2 = 0 \quad \text{és} \quad y^2 - zx = 0.$$

Az előbbi egyenletet z-vel, az utóbbit y-nal szorozva és átrendezve innen azt kapjuk, hogy

$$3z^3 = xyz = y^3.$$

Ebből ismét $y = z = x = 0$ következik. A feladatban szereplő egyenlet tehát csak erre az egy racionális számhármasra teljesül.

Megjegyzés. Ugyanígy látható, hogy ha a olyan racionális szám, amelyik nem köbe racionális számnak, akkor az

$$x^3 + ay^3 + a^2z^3 - 3axyz = 0$$

egyenlet egyetlen racionális számokból álló megoldása $x = y = z = 0$.