(A legkisebb közös többszörös annyiszor fordul elő az alábbi szövegben, hogy röviden lkkt-t írunk helyette.)

I. megoldás. Az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ számok lkkt-ét – amit így szokás jelölni: $[a_1, a_2, \ldots, a_m]$, – úgy határozhatjuk meg, hogy minden prímszámot, amelyik a számok valamelyikének osztója, vesszük azon a legmagasabb hatványon, amelyiken osztója valamelyik a_i-nek, és ezeket a prímszámhatványokat összeszorozzuk. Eszerint

$$T_n = [n,\, n+1,\, \ldots,\, n+k-1] \text{ és } T_{n+1} = [n+1,\, n+2,\, \ldots,\, n+k-1,\, n+k]$$

prímhatványokra történő felbontásában egyenlő hatványon szerepelnek azok a prímszámok, amelyeknek a legmagasabb hatványa az $n+1, n+2, \ldots, n+k-1$ számok valamelyikének a felbontásában fordul elő. T_n-ben magasabb hatványon szerepelnek, mint T_{n+1}-ben azok a prímek (ha vannak), amelyeknek magasabb hatványa osztója n-nek, mint $n+1$, $\ldots, n+k$ bármelyikének, és alacsonyabb hatványon azok az esetleges prímek, amelyeknek magasabb hatványa osztója $n+k$-nak, mint $n, \ldots, n+k-1$ bármelyikének.

Legyenek $p_1, \ldots, p_g$ az előbbi tulajdonságú prímek és legyen p_j a T_n-nek (s így n-nek is) a t_j-edik hatványon osztója, T_{n+1}-nek az u_j-edik hatványon osztója, ahol $t_j > u_j$ $(j = 1, \ldots, g)$; hasonlóan legyenek az utóbbi tulajdonsággal rendelkező prímek $q_1, \ldots, q_h$ és q_j T_n-nek v_j-edik, T_{n+1}-nek w_j-edik hatványon osztója, $v < w_j$ $(j = 1, \ldots, h)$. Ekkor

$$T_{n+1} = \frac{q_1^{w_1-v_1} \ldots q_h^{w_h-v_h}}{p_1^{t_1-u_1} \ldots p_g^{t_g-u_g}} T_n. \tag{1}$$

Végtelen sok olyan n értékre van tehát szükségünk, amelyekre a T_n a jobb oldalon 1-nél kisebb számmal van megszorozva. Ehhez legegyszerűbb n-et úgy választani, hogy $n+1, \ldots, n+k-1$ egyikével se legyen 1-nél nagyobb közös osztója, $(n+k)$-nak viszont legalább az egyikükkel legyen. Ekkor a tört nevezője n lesz, a számlálója pedig legfeljebb $\frac{n+k}{2}$. A tört tehát nem nagyobb, mint $\frac{n+k}{2n}$; ez pedig 1-nél kisebb, ha n nagyobb k-nál.

Ha végtelen sok n-re kielégítjük az első két feltételt, akkor közülük végtelen sok nagyobb is lesz mint k, tehát elég olyan n egészeket keresnünk, amelyekre n relatív prím az $n+1, \ldots, n+k-1$ számokhoz, $n+k$ pedig legalább egyikhez nem relatív prím. A feladatot megoldó versenyzők mind ezt az utat választották, de az n kívánt tulajdonságait igen különböző, módokon biztosították. Bemutatjuk a lényegében legegyszerűbbnek látszót.

Ha valamilyen j-re n-nek és $(n+j)$-nek van 1-nél nagyobb közös osztója, akkor ez közös osztója n és $(n+j)-n=j$-nek is és megfordítva is: n és j közös osztói $(n+j)$-nek is osztói. Azt kell tehát elérnünk, hogy kiválasztandó számaink az

$$1,\, 2,\, \ldots,\, k-1 \tag{*}$$

számokhoz relatív prímek legyenek, tehát például a szorzatukhoz is. Ezzel a tulajdonsággal rendelkeznek az[1]

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1)$$

szorzat többszöröseinek a szomszédai, tehát a $c\big((k-1)!\big) \pm 1$ számok.

Ahhoz, hogy a k-val nagyobb $c\big((k-1)!\big) + k \pm 1$ a (*) alatti számok valamelyikéhez ne legyen relatív prím, a kettős előjelből a negatívat célszerű választani. Ez esetben a k-val növelt szám osztható $(k-1)$-gyel, és az $(n+1)$-ként adódó $c\big((k-1)!\big)$ is osztható $(k-1)$-gyel.

Ha tehát az

$$n_c = c\big((k-1)!\big) - 1$$

számokat választjuk, az (1) egyenlőség nevezője n_c lesz, számlálója pedig legfeljebb

$$\frac{n_c + k}{k-1}.$$

Így

$$T_{n_c+1} \leq \frac{n_c + k}{(k-1)n_c} T_{n_c}.$$

Itt $k-1 \geq 2$, mert a feladat feltétele szerint $k > 2$. Ha tehát $n_c > k$ is teljesül (ami $k=3$-nál $c \geq 3$-ra, $k > 3$ esetén minden pozitív egész c-re igaz), akkor

$$\frac{n_c + k}{(k-1)n_c} < 1, \quad \text{tehát} \quad T_{n_c+1} < T_{n_c}.$$

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy $k=2$-re nem igaz a feladat állítása, $[n,\, n+1] = n(n+1)$ és ez növekvő n-nel állandóan növekszik.

[1] Ezt a szorzatot „k-1 faktoriális"-nak nevezik és így jelölik: $(k-1)!$

Megjegyzések. 1. A lkkt-nek a megoldás elején ismertetett megadásmódja ismét az első feladathoz fűzött 3. megjegyzésben említett számelmélet alaptételéből következik.

2. Egy versenyző $(k-1)!$ helyett a lényegesen kisebb $[1,\,2,\,\ldots,\,k-1]$ számot használta, de elég lett volna ehelyett a k-nál kisebb prímek szorzatát venni, amint azt könnyen beláthatja az olvasó. Összehasonlításul már $k=21$-re $(k-1)!$ felette van a 4700 billiónak, $[1,\,2,\,\ldots,\,k-1]$ közel 233,3 millió, a prímek szorzata pedig valamivel 9,7 millió alatt van.

II. Megoldás. Megkaphatjuk az $[n,\,n+1,\,\ldots,\,n+k-1]$ lkkt-t úgy is, hogy az $n(n+1)\ldots(n+k-1)$ szorzatot elosztjuk bizonyos számokkal, tehát

$$[n,\,n+k,\,\ldots,\,n+k-1]=\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{v_{n,k}} \tag{2}$$

alakban, ahol $v_{n,k}$ természetes szám.

Mielőtt ennek helyességét belátnánk, nézzük meg, hogyan alakul ennek felhasználásával a feladat állításában szereplő egyenlőtlenség. A megfelelő kifejezéseket beírva, kézenfekvő átalakításokkal az

$$nv_{n+1,k}>(n+k)v_{n,k}$$

vagy

$$n(v_{n+1,k}-v_{n,k})>kv_{n,k} \tag{3}$$

adódik. A bal oldalnak pozitívnak kell lennie, amihez

$$v_{n+1,k}>v_{n,k} \tag{4}$$

szükséges. Ha ez fennáll, akkor az utolsó egyenlőtlenség bizonyosan teljesül, ha maga n nagyobb a jobb oldalnál, mert a szorzója legalább 1.

Ezek alapján a feladat állítása következik abból, ha megmutatjuk, hogy

a) Minden adott k-ra $v_{n,k}$ egy csak k-tól függő korlátnál nem nagyobb, és
b) ha $k\ge 3$, adott, akkor $v_{n,k}$ értéke végtelen sokszor változik.

Valóban a b) szerinti változás nem lehet valamilyen határon túl mindig csökkenés, hiszen $v_{n,k}$-nak mindig pozitív egésznek kell lennie, de nem lehet valamilyen értéken túl mindig növekedés sem, hiszen akkor $v_{n,k}$ minden korláton túlnőne, ami a) miatt nem lehet. Van tehát végtelen sok olyan n, amelyre (4) teljesül.

Legyen V egy olyan érték, aminél $v_{n,k}$ sohasem nagyobb, akkor mindazokra az n-ekre, amikre (4) teljesül és amelyek kV-nél nagyobbak, igaz, hogy

$$n(v_{n+k-1}-v_{n,k})>kV\ge kv_{n,k},$$

tehát teljesül (3), abból pedig a feladat állításában szereplő egyenlőtlenség ekvivalens átalakításokkal következik.

A feladat állításának bizonyításához tehát elég a (2) alakú előállítás létezését bizonyítani (egész nevezővel) és a nevező a) és b) tulajdonságát.

A (2) felbontáshoz eljuthatunk úgy, hogy leírjuk egyenként a számláló tényezőit és $n+j$ leírása után $(1\le j\le k-1)$ nézzük annak prímszámhatványok szorzatára bontott alakját. Ha van a prím alapok közül valamelyiknek korábban is többszöröse, akkor veszünk egy olyan $n+i\;(0\le i<j)$ tényezőt, amelyik az illető prím legnagyobb hatványával osztható, és ha ez a hatvány nem nagyobb az $(n+j)$-ben szereplő hatványnál, akkor a nevezőbe írjuk, különben az $(n+j)$-ben fellépő hatványt írjuk a nevezőbe. Világos, hogy így a k-adik lépésben megkapjuk a keresett lkkt-t. $v_{n,k}$ a nevezőbe került prímhatványok szorzata.

A nevezőbe írt prímszámhatvány osztója $(n+i)$-nek is, $(n+j)$-nek is, tehát a különbségüknek $j-i$-nek is, ami pozitív és nem nagyobb j-nél. Az $n+j$ sorravételénél tehát a $j,\,j-1,\,\ldots,\,2$ bizonyos prímszámhatvány osztóival osztunk, tehát összességében nem nagyobb számmal, mint $j!$ Ezt $j=1,\,2,\,\ldots,\,(k-1)$-re alkalmazva kapjuk, hogy

$$v_{n,k}\le 2!\,3!\,\ldots\,(k-1)!,$$

$v_{n,k}$ csak véges sok értéket vesz fel.[2] Ezzel beláttuk a (2) alakú felbontás létezését és az a) állítást. Igazoljuk még b)-t.

Világos, hogy $v_{n,2}=1$ minden n-re.

Legyen p egy k-nál kisebb prímszám, amelyik nem osztója k-nak. – Ilyenek pl. a $k-1\;(\ge 2)$ prímosztói. – Válasszuk n-et úgy, hogy $n+k$ többszöröse legyen p-nek, és vizsgáljuk p kitevőjét $v_{n,k}$ és $v_{n+1,k}$ prímhatványok szorzatára bontott alakjában.

Nem lehet n is többszöröse p-nek, mert különben az $(n+k)-n=k$ is osztható volna p-vel, ellentétben p választásával.

Mivel $p<k$, van többszöröse az $n+1,\,n+2,\,\ldots,\,n+k-1$ számok közt. Ha áttérünk $[n,\,n+1,\,\ldots,\,n+k-1]$-ről $[n+1,\,\ldots,\,n+k-1,\,n+k]$-ra, akkor a (2) jobb oldalának számlálójából elmarad a p-vel nem osztható

[2] Belátható, hogy az is igaz, hogy $v_n\le(k-1)!$ pontosabban $v_{n,k}|(k-1)!$, és az egyenlőtlenségben végtelen sokszor az „=" jel érvényes.

n tényező és megjelenik a p-vel osztható $n+k$. Világos, hogy n elhagyása a p kitevőjét nem befolyásolja, viszont $n+k$ hozzávétele után az előállításra vonatkozó gondolatmenetet követve látható, hogy a nevezőbe kell írnunk p-nek valamilyen hatványát. $v_{n+1,k}$ tehát p-nek magasabb hatványával osztható, mint $v_{n,k}$, s így (függetlenül esetleges egyéb különbségektől) különböző számok, mivel a számok prímhatványokra történő felbontása lényegében egyértelmű.

Megjegyzések. 1. Az I. megoldás során több módon is megadtunk adott k-hoz végtelen sok olyan n értéket, amire teljesül a $T_n < T_{n+1}$ egyenlőtlenség, de távolról sem adtuk meg az összes ilyen n-et. Ez reménytelenül nehéz feladatnak is látszik. [3] Belátható, hogy a legkisebb n is, ami ott adódik, sokkal nagyobb k-nál.

Jelöljük n_k-val adott k-hoz a legkisebb olyan n-et, amire teljesül a $T_n < T_{n+1}$ egyenlőtlenség. Néhány értéket a következő táblázat mutat:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	29	30	31	32	210
n_k	–	5	5	7	9	8	11	11	11	13	13	17	16	17	17	31	47	32	37	237

Láthatólag ezek az értékek alig nagyobbak k-nál. Az világos, hogy n_k-nak k-nál nagyobbnak kell lennie, mert ha $n \leq k$, akkor az $n+1, \ldots, n+k$ között van n-nel osztható, hiszen $2n \leq n+k$. Így $[n+1, \ldots, n+k]$ osztható n-nel, és természetesen $n+1, \ldots, n+k-1$-gyel is, tehát $[n, \ldots, n+k-1]$ osztója $[n+1, \ldots, n+k]$-nak, amiből következik, hogy nem lehet az előbbi nagyobb.

A prímszámok eloszlására vonatkozó mély tételek segítségével belátható, hogy n_k/k tetszés szerinti 1-nél nagyobb h számnál kisebb lesz, amint k egy alkalmas (h-tól függő) korlátnál nagyobb.

2. Számolás közben sok olyan n-re találunk, amelyre $[n, \ldots, n+k-1] = [n+1, \ldots, n+k]$. Ez $n = k$-ra pl. csak akkor nem teljesül, ha k a 2-nek egy hatványa. De $k = 19$-re pl. $n = 19$-től $n = 22$-ig négy egymás utáni értékre teljesül az egyenlőség, $k = 210$-re, pedig $n = 213$-tól $n = 220$-ig nyolc egymás utáni esetben. Ezek után első pillanatra talán meglepően hat, hogy minden k-hoz legfeljebb véges sok esetben lehet két szomszédos lkkt egyenlő, pedig a (2) formula alapján ez legfeljebb az

$$n = \frac{kv_{n,k}}{v_{n+1,k} - v_{n,k}}$$

értékekre teljesül (és közülük az egész értékekre teljesül is). Mivel pedig $v_{n,k}$ csak véges számú különböző értéket vehet fel, így csak véges számú megfelelő n létezik.

[3] Figyeljük meg, hogy a II. megoldás csak végtelen sok ilyen n létezését bizonyítja, anélkül, hogy megadna ilyen n-eket. Annak a gondolatmenetnek az alapján csak a $v_{n,k}$ nevezők szerkezetének sokkal pontosabb ismerete tenné lehetővé ilyen n-ek megadását.