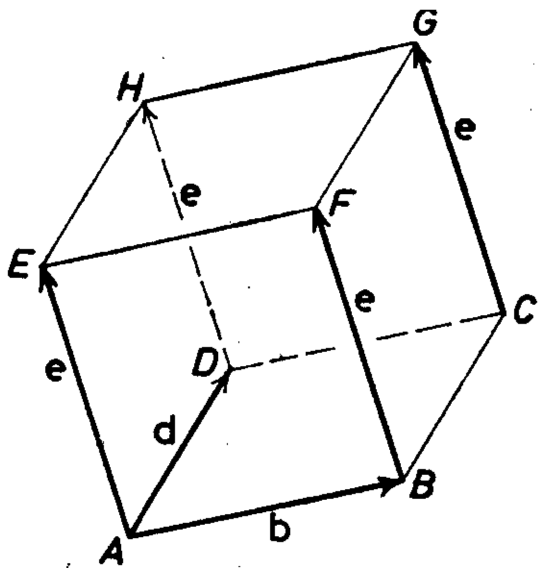
Fel fogjuk használni – amit a megjegyzések keretében be is bizonyítunk –, hogy az $\mathbf{r}(r_1, r_2, r_3)$ és az $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ koordinátáival adott két vektor akkor és csak akkor merőleges, ha

$$r_1u_1 + r_2u_2 + r_3u_3 = 0.$$

Legyenek egy $ABCDEFGH$ kocka egy lapjának $A$, $B$, $C$, $D$ csúcsai egész koordinátájúak, a kocka élének hossza a szintén egész szám, az $A$-val szomszédos harmadik csúcs $E$. Azt kell belátnunk, hogy $E$, $F$, $G$, $H$ is egész koordinátájú. Elég belátnunk, hogy pl. az $\overrightarrow{AE}$ vektor koordinátái egész számok, hiszen $E$, $F$, $G$, $H$ koordinátáit úgy kaphatjuk, hogy $A$, $B$, $C$, ill. $D$ koordinátáihoz hozzáadjuk $\overrightarrow{AE}$ koordinátáit.

Legyenek az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$, $\overrightarrow{AE} = \mathbf{e}$ koordinátái

$$(b_1, b_2, b_3), \quad (d_1, d_2, d_3), \quad \text{ill} \quad (e_1, e_2, e_3).$$




Ezeket úgy kaphatjuk, hogy a $B$, $D$, ill. $E$ pont koordinátáiból kivonjuk $A$ koordinátáit. A $\mathbf{b}$ és $\mathbf{d}$ vektor koordinátái tehát egész számok, és azt kell belátnunk, hogy $\mathbf{e}$ koordinátái is azok. A $\mathbf{b}$ és $\mathbf{d}$ vektorok hossza $a$, és a vektorok merőlegesek, tehát koordinátáikra teljesül, hogy

$$(1)\ \ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = a^2, \qquad (2)\ \ d_1^2 + d_2^2 + d_2^3 = a^2, \qquad (3)\ \ b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 = 0.$$

Az $\mathbf{e}$ vektor merőleges $\mathbf{b}$-re is, $\mathbf{d}$-re is és $a$ hosszúságú, tehát

$$b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 = 0,$$

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = a^2.$$

$$d_1e_1 + d_2e_2 + d_3e_3 = 0,$$

Az első két egyenletből kifejezhetjük $e_1$, $e_2$, $e_3$-at, de ezt a **3** adatot a két egyenlet csak egy $k$ közös szorzó tényező erejéig határozza meg.A számításokat elvégezve azt kapjuk, hogy

$$e_1 = k(b_2d_3 - b_3d_2), \quad e_2 = k(b_3d_1 - b_1d_3), \quad e_3k(b_1d_2 - b_2d_1).$$

A vektor hosszát kiszámítva

$$a^2 = k^2\{b_2^2d_3^2 + b_3^2d_2^2 + b_3^2d_1^2 + b_1^2d_3^2 + b_1^2d_2^2 + b_2^2d_1^2 - 2b_2d_2b_3d_3 - 2b_1d_1b_3d_3 - 2b_1d_1b_2d_2\}. \tag{4}$$

Bontsuk a kivonandókat 2–2 egyenlő tag összegére és a másik két tag egyikének, ill. másikának egyik részével közös tényezőket emeljük ki. Ekkor a kivonandó így alakul

$$\begin{gathered}-b_2d_2b_3d_3 - b_3d_3b_1d_1 - b_2d_2b_3d_3 - b_2d_2b_1d_1 - b_1d_1b_2d_2 - b_1d_1b_3d_3 = \\ = -b_3d_3(b_1d_1 + b_2d_2) - b_2d_2(b_3d_3 + b_1d_1) - b_1d_1(b_2d_2 + b_3d_3) = \\ = -b_3d_3(-b_3d_3) - b_2d_2(-b_2d_2) - b_1d_1(-b_1d_1).\end{gathered}$$

Az utolsó lépésben mindhárom tag második tényezőjére a (3) összefüggést alkalmaztuk. Eredményünket (4)-be beírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{gathered}a^2 = k^2\{b_2^2d_3^2 + b_3^2d_2^2 + b_3^2d_1^2 + b_1^2d_3^2 + b_1^2d_2^2 + b_2^2d_1^2 + b_3^2d_3^2 + b_2^2d_2^2 + b_1^2d_1^2\} = \\ = k^2\{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\,(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)\} = k^2a^4, \quad k^2 = \frac{1}{a^2}.\end{gathered}$$

Az $\mathbf{e}$ vektor koordinátái tehát:

$$\frac{b_2d_3 - b_3d_2}{a}, \quad \frac{b_3d_1 - b_1d_3}{a}, \quad \frac{b_1d_2 - b_2d_1}{a},$$

vagy ezek ellentettjei. Világos, hogy ezek racionális számok, azt kell belátnunk, hogy egészek.

Elég ezt a fenti hármasról belátni, mert egész szám ellentettje is egész. Elég továbbá egyik koordinátáról belátni, hogy az egész, mert akkor az indexek alkalmas cseréjével adódik a másik kettő egész voltának a bizonyítása.

Azt fogjuk belátni, hogy a koordináta négyzete egész szám. Tudjuk, hogy *ha egy racionális szám négyzete egész szám, akkor az alap is egész szám.* Az első koordináta számlálójának négyzetét fogjuk átalakítani:

$$\begin{gathered}(b_2d_3 - b_3d_2)^2 = b_2^2d_3^2 + b_3^2d_2^2 - 2b_2d_2b_3d_3 = \\ = b_2^2d_3^2 + b_3^2d_2^2 - b_2d_2(-b_1d_1 - b_2d_2) - b_3d_3(-b_3d_3 - b_1d_1) = \\ = b_2^2d_3^2 + b_3^2d_2^2 + b_1d_1b_2d_2 + b_2^2d_2^2 + b_3^2d_3^2 + b_1d_1b_3d_3 = \\ = b_2^2d_3^2 + b_3^2d_2^2 + b_2^2d_2^2 + b_3^2d_3^2 + b_1d_1(b_2d_2 + b_3d_3) = \\ = (b_2^2 + b_3^2)(d_2^2 + d_3^2) - b_1^2d_1^2 = (a^2 - b_1^2)(a^2 - d_1^2) - b_1^2d_1^2 = a^2(a^2 - b_1^2 - d_1^2).\end{gathered}$$

Itt ismét két tagra bontottuk a kivonandót és egyszer az első, másszor a második két tényező szorzatát helyettesítettük a (3) összefüggésből adódó értékével, majd alkalmaztuk (1)-et, (2)-t és mégegyszer (3)-at.

Azt nyertük tehát, hogy

$$\left(\frac{b_2d_3 - b_3d_2}{a}\right)^2$$

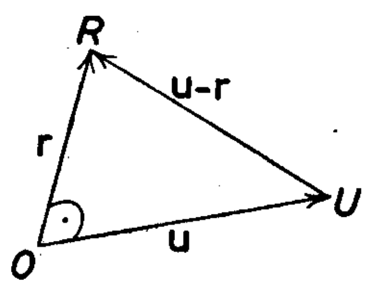
egész szám, és ebből – mint már említettük – következik az alap egész volta is. Ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

*Megjegyzések.* 1. A megoldás elején kimondott állítás így látható be: Az, hogy $r$ és $u$ merőleges egymásra, azt jelenti, hogy az $ORU$ háromszög derékszögű (a 2. ábra betűzését használjuk), ez pedig egyenértékű állítás azzal, hogy a háromszög oldalaira teljesül Pitagorász tétele. Az $\mathbf{r}-\mathbf{u}$ vektor koordinátái $(r_1 - u_1,\ r_2 - u_2,\ r_3 - u_3)$, így a feltételt koordinátákkal felírva

$$\begin{gathered}r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = (r_1 - u_1)^2 + (r_2 - u_2)^2 + (r_3 - u_3)^2 = \\ = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - 2(r_1u_1 + r_2u_2 + r_3u_3).\end{gathered}$$

Ez pedig valóban egyenértékű azzal, hogy

$$r_1u_1 + r_2u_2 + r_3u_3 = 0.$$




2. Aki ismeri a vektorok skaláris szorzatát, annak a most levezetett összefüggés jól ismert, aki pedig a vektoriális szorzatot is ismeri, az tudja, hogy az $\mathbf{e}$ vektor koordinátáiban $k$ szorzói a vektorszorzat koordinátái, és azt is, hogy merőleges vektorok vektorszorzatának a hossza a tényezők hosszának a szorzata, esetünkben tehát $a^2$. Így $k$ vagy $\frac{1}{a}$ vagy $-\frac{1}{a}$. Ezeket felhasználva lényegesen lerövidül a megoldás.

3. A bizonyítás végén felhasznált tétel: ha egy racionális szám négyzete egész, akkor az alap is egész, a számelmélet alaptételének a következménye. E tétel szerint az egész számok törzstényezőkre bontott alakjában a tényezők sorrendtől eltekintve egyértelműen vannak meghatározva.

Valóban, ha egy $v/w$ tört ($v$, $w$ egész) nem egész szám, akkor $w$-nek van olyan $p$ törzstényezője, ami $v$ felbontásában kisebb hatványon szerepel, mint $w$-ében (esetleg egyáltalán nem szerepel). De

$$\left(\frac{v}{w}\right)^2 = \frac{v^2}{w^2}.$$

Az alaptétel szerint $v^2$-nek és $w^2$-nek nincs más prímtényezős felbontása, mint amelyik a $v$, ill. $w$ felbontásában szereplő prímek hatványkitevőinek kétszerezésével keletkezik. Ekkor azonban $p$ a $v^2/w^2$ tört nevezőjében is magasabb hatványon szerepel, mint, a számlálóban, tehát ez a tört sem lehet egész szám.