Megoldás. Azon, hogy egy n egész számot egy pozitív egész számmal maradékosan osztunk, egy

$$n = cq + r$$

alakú előállítását értjük, ahol q (a hányados) egész szám, r pedig (a maradék) kisebb, mint c és nem negatív. Ilyen hányados és maradék mindig van és mindig csak egy.

Vizsgáljuk n és $n-1$ maradékát ugyanazzal a k számmal történő osztásnál. Ha a fenti osztásnál az r maradék nem 0, akkor

$$n - 1 = cq + (r - 1),$$

és mivel a maradék egyértelműen meg van határozva, így minden ilyen esetben 1 adódik hozzá az $r(n) - r(n-1)$ különbséghez. Ha viszont $r = 0$, vagyis c osztója n-nek, akkor

$$n - 1 = c(q - 1) + c - 1,$$

tehát az n osztói az osztónál 1-gyel kevesebbel csökkentik a fenti különbséget. Jegyezzük meg, hogy magával n-nel n-et még el kell osztanunk a feladat szövege szerint, $n-1$-et azonban már nem. Ezt az osztót azonban figyelmen kívül is hagyhatjuk, mert az elvégzendő osztás maradéka 0. Jelöljük az n szám n-nél kisebb (pozitív) osztóinak összegét $s(n)$-nel, számukat $d(n)$-nel, akkor megállapításaink szerint

$$r(n) - r(n-1) = n - d(n) - 1 - \big(s(n) - d(n)\big) = n - 1 - s(n).$$

A feladat eszerint annak a belátását kívánja, hogy végtelen sok olyan k szám van, amelyikre

$$s(k) = k - 1.$$

Az első néhány szám kipróbálása azt mutatja, hogy a 2 hatványai ilyenek, és valóban könnyű belátni, hogy $k = 2^l$ minden pozitív egész l kitevőre kielégíti az egyenletet. Valóban, 2^l nála kisebb osztói $1,\ 2,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^{l-1}$. Ezek mértani sorozatot alkotnak, amelyben az elemek összege – mivel az elemek száma l, a hányados pedig 2 –

$$\frac{\big[2^l - 1\big]}{2 - 1} = 2^l - 1 = k - 1.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzések. 1. A feladat igen hasonló a tökéletes számok problémájához. A fenti jelöléseket használva akkor neveztek az ókori görögök tökéletesnek egy számot, ha

$$s(k) = k.$$

Már Euklidész elemeiben szerepel, hogy a $2^{s-1}(2^s - 1)$ alakú számok tökéletesek, ha a második tényező törzsszám. Mintegy 2000 évvel később Euler bebizonyította, hogy a páros számok közül csak az Euklidész által említett számok tökéletesek.

Páratlan tökéletes szám nem ismeretes. Számos olyan tulajdonságot találtak, amivel minden páratlan tökéletes számnak – ha van ilyen – rendelkeznie kell. A legkisebb szám is, amelyiknek mindez a tulajdonsága megvan, elképzelhetetlenül nagy kell hogy legyen, azt azonban nem sikerült eddig bebizonyítani, hogy nincs páratlan tökéletes szám.

A $2^s - 1$ alakú szám könnyen láthatóan csak akkor lehet prím, ha s is prímszám, de távolról sem igaz, hogy minden s prímszámra prímszámot adna a fenti formula. Pl.

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89.$$

Eddig a nagyteljesítményű számítógépek segítségével is mindössze 27 ilyen alakú prímet találtak, így ugyanennyi az ismert tökéletes számok száma is. Nem tudjuk, hogy van-e több, még azt sem sikerült azonban eldönteni, hogy van-e végtelen sok, vagy pedig véges a páros tökéletes számok száma.

2. Az

$$s(k) = k - 1$$

egyenletről azt láttuk be, hogy 2 minden hatványa megoldása, tehát végtelen sok megoldása van. Nem tudjuk azonban, hogy van-e más megoldása is, mint a 2 hatványai. Annyit nem nehéz belátni, hogy egy $2^l m$ alakú szám, ahol m páratlan (l lehet 0 is) csak akkor elégítheti ki az egyenletet, ha m egy egész szám négyzete.

3. A bizonyítás során nyert

$$r(n) - r(n-1) = n - 1 - s(n)$$

formulát $n = 2,\ 3,\ \ldots,\ k$-ra összeadva és felhasználva, hogy $r(1) = 0$, azt kapjuk, hogy

$$r(k) = \big(r(k) - r(k-1)\big) + \big(r(k-1) - r(k-2)\big) + \ldots + \big(r(2) - r(1)\big) + r(1) =$$
$$= (k-1) + (k-2) + \ldots + 1 - s(k) - s(k-1) - \ldots - s(2) = \frac{k(k-1)}{2} - S(k),$$

ahol $S(k)$-val a következő összeget jelöltük:

$$S(k) = s(k) + s(k-1) + \ldots + s(2).$$

[Az összeghez $s(1)$-et is hozzáírhatjuk, ha tetszik, mert annak értéke 0.]

Célszerűbb $s(k)$ helyett az összes osztók $\sigma(k)$ összegét használni. A kettő kapcsolata

$$\sigma(k) = s(k) + k.$$

A $\sigma(k) + \sigma(k-1) + \ldots + \sigma(1)$ összeget $\sum(k)$-val jelölve

$$S(k) = \sigma(k) - k + \sigma(k-1) - (k-1) + \ldots + \sigma(1) - 1 = \sum(k) - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ezt $r(k)$ képletébe beírva az egyszerűbb

$$r(k) = k^2 - \sum(k)$$

formulát kapjuk.

Néhány versenyző felhasználta, hogy n-et c-vel maradékosan osztva a hányados $\left[\frac{n}{c}\right]$, azaz $n = c \cdot \left[\frac{n}{c}\right] + r$, ahol $0 \leq r < c$,
továbbá az irodalomra hivatkozva* a

$$\sum(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + 2\left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + n\left[\frac{n}{n}\right]$$

formulát. Ezekből eljutott az $r(n)$-re éppen nyert képlethez és azt vette segítségül a feladat megoldásához (nem mindig sikerrel).

* *D. O. Skljarszkij–N. N. Csencov–J. M. Jaglom:* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 1. Aritmetika és algebra 172. o.