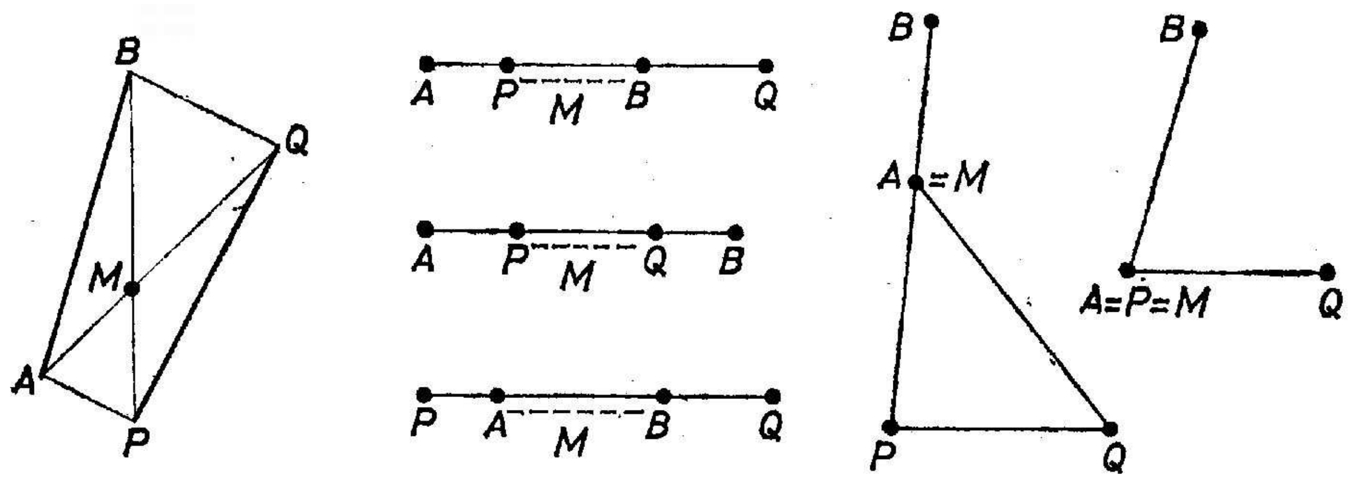
Megoldás. Mielőtt a tulajdonképpeni megoldásra térnénk, megjegyezzük, hogy a feladat szövege nem zárja ki, hogy a pontok közül több, akár mind az 5 egy egyenesre essék, sőt a bizonyítandó egyenlőtlenség még akkor is érvényes, ha több pont egybeesik. Ha egy K és L pont egybeesik, akkor a KL (zárt) szakaszon a $K(=L)$ pontot értjük, a hossza pedig 0. A háromszög-egyenlőtlenség továbbra is érvényes a következő alakban: a tetszés szerinti K, L, M pontokra

$$\overline{KL}+\overline{KM}\geq\overline{LM},$$

és itt abban az esetben érvényes az egyenlőség jele, ha K az LM szakasz pontja.



1. ábra

A feladatra térve, annak állítását az említett legáltalánosabb értelmezés mellett bizonyítjuk. Két esetet különböztetünk meg. Az első, ha a P, Q, R pontok között van kettő, mondjuk P és Q, amelyekre az AQ és BP szakaszoknak van egy M közös pontja (1. ábra.) Ez más szóval azt jelenti, hogy $ABQP$ konvex négyszög, amely egyenes szakasszá is fajulhat, ha a négy pont egy egyenesen van, vagy háromszöggé, ha három pont egy egyenesen van; esetleg két szomszédos csúcs egybeesik. Ilyenkor MAB-re és MPQ-ra alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget

$$\overline{MA}+\overline{MB}\geq\overline{AB},\qquad\overline{MP}+\overline{MQ}\geq\overline{PQ}.$$

Itt

$$\overline{MA}+\overline{MQ}=\overline{AQ},\qquad\overline{MB}+\overline{MP}=\overline{BP},$$

így a két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva azt nyerjük, hogy

$$\overline{AQ}+\overline{BP}\geqq\overline{AB}+\overline{PQ}.$$

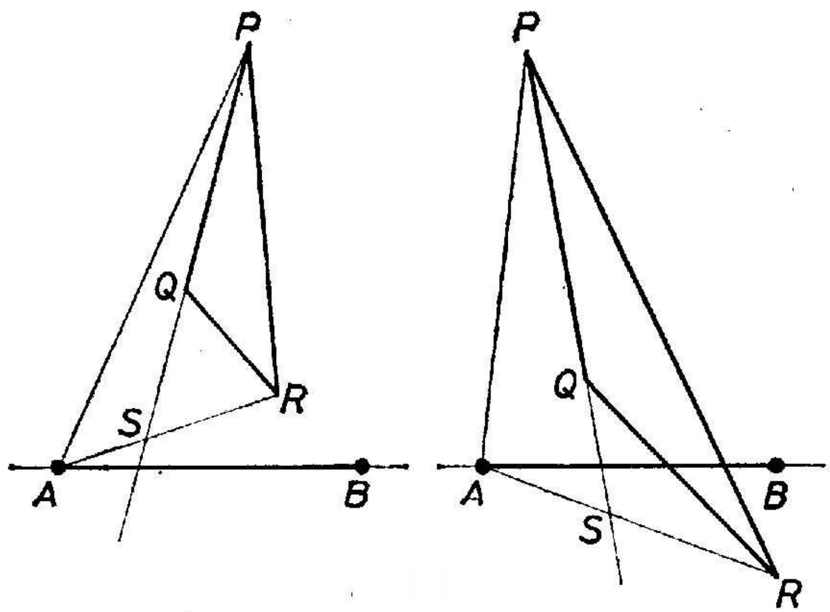
Bárhol fekszik is az R pont, APR-re és BQR-re alkalmazva a háromszögegyenlőtlenséget

$$\overline{AP}+\overline{AR}\geq\overline{PR},\qquad\overline{BQ}+\overline{BR}\geq\overline{QR}.$$

Az utolsó három egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva a bizonyítandó összefüggést kapjuk.

Az olyan eseteket kell még megvizsgálnunk, amelyekben bármely kettőt jelenti is U és V a P, Q, R pontok közül, AU-nak és BV-nek nincs közös pontja. Ez esetben mind az 5 pont különböző, és sem PQ, sem QR, sem PR nem párhuzamos AB-vel. Ha ugyanis A és B, vagy A és P, vagy B és Q, vagy P és Q egybeesnék, vagy ha PQ és AB egy irányban párhuzamos volna, akkor AQ-nak és BP-nek volna közös pontja, az első négy esetben éppen az egybeeső pontpár.

A P, Q, R pontok közül legalább kettő az AB egyenesnek ugyanarra a partjára vagy az egyenesre esik. Jelöljük ezek közül a távolabbit, illetőleg a legtávolabbit P-vel, a másikat Q-val, ha pedig R is erre az oldalra esik, az legyen az AB egyeneshez legközelebbi. Ekkor a PQ egyenes belső pontban metszi az AB szakaszt, mert különben $ABPQ$ vagy $ABQP$ konvex négyszög volna, s így átlóinak volna közös pontja.



2. ábra

Ha P, Q, R nincs egy egyenesen, feltehetjük, hogy a PQ egyenes elválasztja A-t és R-et (2. ábra). Ekkor az APR háromszög tartalmazza (belsejében vagy a határán) Q-t. AR és PQ metszéspontját jelöljük S-sel. Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az APS háromszögre (ez nem elfajuló, mert A nincs a PS egyenesen), és SQR-re:

$$\overline{AP} + \overline{AS} > \overline{PS}, \qquad \overline{SQ} + \overline{SR} \geq \overline{QR}.$$

Itt

$$\overline{AS} + \overline{SR} = \overline{AR}, \qquad \overline{PS} = \overline{PQ} + \overline{SQ}.$$

A két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva, figyelembe véve a két egyenlőséget és mindkét oldalról elhagyva a $\overline{QS}$ távolságot, azt kapjuk, hogy

$$\overline{AP} + \overline{AR} > \overline{PQ} + \overline{QR}.$$

(Mivel az egyik esetben nem állhat fenn egyenlőség, így az összeadással keletkezett egyenlőtlenségben sem.)

Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget QAB-re és BPR-re:

$$\overline{QA} + \overline{QB} \geq \overline{AB}, \qquad \overline{BP} + \overline{BR} \geq \overline{PR}.$$

Az utolsó három egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva ebben az esetben is a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A bizonyítás során a háromszög-egyenlőtlenség következő két következményét bizonyítottuk be és használtuk fel:

a) *Konvex négyszög átlói hosszának az összege nagyobb, mint két szemközti oldal hosszának az összege.*

b) *Ha az ABC háromszög tartalmazza a D pontot, de D különbözik A-tól, akkor*

$$\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{DB} + \overline{DC}.$$

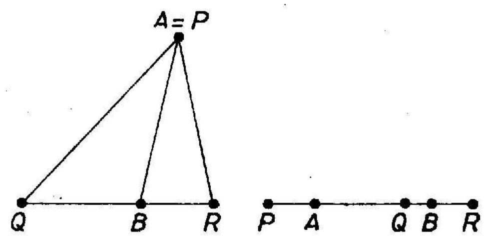
Mindkét állítás igaz elfajuló sokszögekre is, ha „nagyobb" helyett „nagyobb vagy egyenlőt" mondunk. Az első állításban, ha két szomszédos csúcs egybeesik, akkor az ebből a pontból a másik két pontba vezető szakaszok szemben fekvő oldalaknak számítanak, de egyben ezek a négyszög átlói is. Így ha ezt a két szemben fekvő oldalt vesszük, akkor egyenlőség áll fenn. (Ha a másik két szemben fekvő oldalt tekintjük, azok közül az egyik 0 hosszúságú, s így a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk.) A bizonyítást elemezve láthatjuk, hogy még egy esetben áll fenn egyenlőség: ha a négy pont egy egyenesen van, a szemközti oldalpárnak tekintett két szakasz egyirányú és van közös pontjuk.

Mindkét alakzat a második állítás elfajuló esetének is tekinthető: az előbbi annak a fönt kizárt esetnek, ha D egybeesik A-val, a második pedig annak, amikor a háromszög csúcsai egy egyenesen vannak, továbbá A és D a BC szakasz pontjai. A bizonyítást elemezve látható, hogy csak ezekben az esetekben állhat fenn egyenlőség.

2. Nézzük meg, a feladat állításában mikor állhat fenn egyenlőség. Láttuk, hogy a bizonyítás második részében ez nem következhet be, mert az első rész-egyenlőtlenségben nem állhat fenn egyenlőség.

A bizonyítás első részében a négyszögre vonatkozó egyenlőtlenségben akkor áll fenn egyenlőség, ha A és P egybeesik (ettől nem lényegesen különböző eset, ha B és Q esik egybe) vagy ha AB és PQ egy egyenesnek két egyirányú szakasza, amelyeknek van közös pontjuk (a 0 hosszúságú szakaszt minden szakasszal párhuzamosnak és egyirányúnak tekintjük). A további két egyenlőtlenségben akkor lesz az egyenlőség jele érvényes, ha A a PR szakasznak, B pedig a QR szakasznak pontja.

Ha A és P egybeesik, akkor az utolsó előtti követelmény R helyzetétől függetlenül teljesül, így akkor lesz a feladat állításában az egyenlőség jele érvényes, ha R a QB szakasz B-n túli meghosszabbításán van. Egyik lehetőségnek azt kaptuk tehát, hogy A és B egyike a PQR háromszög egyik csúcsával esik egybe, a másik pedig a szemközti oldalszakasz pontja.



3. ábra

Ha A, B, P és Q egy egyenesen van, akkor az utolsó két követelmény akkor és csak akkor teljesül, ha R is ezen az egyenesen van, továbbá A és B a másik három pont közti két, közös belső pont nélküli szakasz egyikének, ill. másikának pontja (3. ábra).

3. Általánosan igaz, hogy ha $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ és $B_1,\ B_2,\ ...,\ B_{n+1}$ egy sík pontjai, akkor az A-k közti szakaszok és a B-k közti szakaszok hosszának összege nem nagyobb, mint az összes $A_i\ B_j$ távolságok összege. $n=1$-re a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk; az $n=2$ eset bizonyítása volt a kitűzött feladat. Nagyobb n értékek esetére egy hasonló jellegű bizonyítási kísérlet áttekinthetetlenné válnék. A gömb már több lehetőséget kínál a rá vonatkozó megfelelő állítás bizonyítására. Ez után a sugár minden határon túli növelésével látható be, hogy az állításnak a síkban is igaznak kell lennie. Ennek a részleteibe azonban nem bocsátkozunk bele.