2. feladat. *Legyen $n > 1$ páratlan egész szám. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor léteznek olyan x, y természetes számok, melyekre*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \tag{1}$$

ha n-nek van $4k-1$ alakú prímosztója.

I. megoldás. Tegyük fel, hogy van az egyenletnek pozitív egész x, y megoldása. Legyen a két szám legnagyobb közös osztója d, azaz

$$x = dx_1, \qquad y = dy_1,$$

ahol x_1 és y_1 pozitív egész és nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk, más szóval relatív prímek. Ezt beírva az egyenletbe és a törteket eltávolítva, azt kapjuk, hogy

$$4dx_1y_1 = n(x_1 + y_1). \tag{2}$$

Itt n páratlan volta miatt a jobb oldal csak úgy lehet 4-gyel osztható, ha $x_1 + y_1$ osztható 4-gyel. Ekkor x_1 és y_1 vagy mindkettő páros vagy mindkettő páratlan. Mivel ezen kívül relatív prímek is, csak a második eset következhet be. Minthogy pedig az összegük osztható 4-gyel, ez csak úgy lehet, ha az egyik $4k+1$ alakú, a másik $4k-1$ alakú.

A (2) összefüggés szerint x_1 osztója az $n(x_1 + y_1)$ szorzatnak. $x_1 + y_1$-hez azonban relatív prím, hiszen ha volna 1-nél nagyobb közös osztójuk, az osztója volna $(x_1 + y_1) - x_1 = y_1$-nek is, azonban x_1 és y_1 relatív prímek. Ismeretes, hogy ebben az esetben x_1 csak úgy lehet osztója a szorzatnak, ha a másik tényezőjének, n-nek is osztója. Ugyanígy következik, hogy y_1 is osztója n-nek.

Az x_1-re és y_1-re tett megállapításaink alapján következik, hogy ha megoldható az egyenlet, akkor van n-nek $4k-1$ alakú osztója. Ekkor azonban van ilyen alakú prímosztója is. Ha ugyanis egy $4k-1$ alakú számot akárhogy felbontunk tényezőkre, akkor azok közt van $4k-1$ alakú. Valóban, számunk páratlan, így a felbontás tényezői is páratlanok, akkor pedig vagy $4k+1$ vagy $4k-1$ alakúak. Két előbbi alakú szám szorzata is ilyen alakú:

$$(4k_1 + 1)(4k_2 + 1) = 4(4k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1,$$

és ez az alak újabb ilyen tényezőkkel szorozva sem változik meg. Elő kell tehát fordulnia $4k-1$ alakúnak is. Ez igaz akkor is, ha prímtényezőkre bontottuk a számot. Így n $4k-1$ alakú osztójának van $4k-1$ alakú prímosztója, de ez osztója n-nek is.

Tegyük most fel, hogy $p = 4k-1$ n-nek egy prímosztója: $n = p \cdot m$. Ekkor

$$\frac{4}{n} = \frac{4k}{k \cdot p \cdot m} = \frac{p+1}{k \cdot p \cdot m} = \frac{1}{km} + \frac{1}{kpm},$$

tehát $x = km$, $y = kpm$ megoldása az egyenletnek. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzések. **1.** Felhasználtuk azt a tételt, hogy ha egy egész szám osztója egy szorzatnak, de annak egyik tényezőjéhez relatív prím, akkor osztója a másik tényezőnek. Ez következik a számelmélet alaptételéből, ami szerint minden 1-nél nagyobb természetes szám felbontható véges sok (pozitív) prímszám szorzatára és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű. Fordítva, az alaptétel is következik a fent kimondott tételből, az pedig bizonyítható az alaptétel felhasználása nélkül.

2. A bizonyítás befejező részében nem használtuk ki, hogy p prím, tehát képleteink n minden $4k-1$ alakú osztójához megadnak egy megoldást.

3. A megoldás első részének gondolatmenetét folytatva $n = n'x_1$ és x_1, y_1 relatív prím volta miatt a jobb oldali szorzat csak úgy lehet y_1-gyel osztható, ha n' osztható vele: $n' = my_1$. Ezeket beírva (2)-be $m(x_1 + y_1) = 4d$ adódik.

Láttuk továbbá, hogy $x_1 + y_1$ osztható 4-gyel, így $x_1 + y_1 = 4e$ jelöléssel

$$(3_1)\ n = mx_1(4e - x_1), \quad (3_2)\ x = emx_1, \quad (3_3)\ y = em(4e - x_1).$$

Ebből is világos, hogy x_1 és $4e - x_1 = y_1$ közül az egyik $4k+1$, a másik $4k-1$ alakú.

Mivel x és y szerepe szimmetrikus, feltehetjük, hogy x_1 a $4k+1$ alakú. Tudjuk már, hogy x_1 és $4e - x_1$ relatív prímek.

Azt kaptuk tehát, hogy az (1) egyenlet összes megoldását megkapjuk, ha vesszük n-nek (3_1) alakú felbontásait, amelyekben x_1 és $4e - x_1$ relatív prímek, és képezzük hozzájuk a (3_2), (3_3) képletek szerinti értékeket, továbbá a két szám felcserélésével keletkező számpárt. x és y mindig különböző, mert x_1 és $4e - x_1$ nem lehet egyenlő.

n-nek minden $t = 4j - 1$ alakú osztójához van legalább egy (3_1) alakú felbontása. Válasszuk ugyanis $t - t$ $4e - x_1$-nek, x_1-nek pedig az n/t bármelyik $4k+1$ alakú és t-hez relatív prím osztóját (az 1 mindig ilyen). Ekkor $e = (t + x_1)/4$ egész és $m = n/(tx_1)$. (Megoldást kapunk akkor is, ha t és x_1 nem relatív prím, csak így egyes megoldásokat többször is megkaphatunk.)

II. megoldás. A feladatnak csak azt a részét bizonyítjuk, hogy ha az (1) egyenlet megoldható, akkor van n-nek $4k-1$ alakú prímosztója. A törteket eltávolítva és 0-ra redukálva a

$$4xy - n(x+y) = 0$$

összefüggést kapjuk. Szorozzunk 4-gyel és adjunk mindkét oldalhoz n^2-et, ekkor a bal oldal szorzattá alakítható.

$$(4x-n)(4y-n) = n^2.$$

Itt a bal oldali tényezők pozitívok, mert (1)-ből $1/x$ is, $1/y$ is kisebb $4/n$-nél, s így

$$4x > n, \quad 4y > n.$$

Ha n-nek nincs $4k-1$ alakú prímosztója, akkor nem állhat fenn az egyenlet, ekkor ugyanis $4x-n$ is, $4y-n$ is $4k-1$ alakú, tehát mint az előző megoldásban láttuk, van $4k-1$ alakú prímosztójuk. Ekkor azonban a bal oldalt prímtényezőkre bontva, azok közt lennének $4k-1$ alakú prímek, a jobb oldalon viszont beírva n prímtényezős felbontását, csupa $4k+1$ alakú prímszám szorzata állna, ez pedig ellentmond annak, hogy minden 1-nél nagyobb természetes szám a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen írható fel prímtényezők szorzataként.

Megjegyzés. Lényeges volt, hogy a természetes számok körére szorítkozunk, s ezért meg kellett állapítani, hogy a szorzat tényezői pozitívok. Ezt a legtöbb versenyző, aki ezt az utat választotta, elmulasztotta. Pedig írhatjuk az egyenlőséget

$$(n-4x)(n-4y) = n^2$$

alakban is, és ekkor semmi probléma nem látszik adódni abból, ha n minden prímosztója $4k+1$ alakú. Valóban van is megoldása az (1) egyenletnek, ha csak azt kívánjuk, hogy x és y egész legyen és $n = 4k+1$:

$$\frac{4}{n} = \frac{4k}{kn} = \frac{n-1}{kn} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k \cdot n} = \frac{1}{k} + \frac{1}{-kn}.$$