1. feladat. *A tér pontjait kiszínezzük* 5 *színnel (mind az* 5 *szín ténylegesen előfordul). Bizonyítsuk be, hogy van olyan sík, amelyik legalább* 4 *különböző színű pontot tartalmaz.*

Megoldás. A színeket nevezzük a, b, c, d, e-nek, és A, B, C, D, E jelentsen a továbbiakban mindig egy–egy a, b, c, d, ill. e színű pontot. Egy egyenest, síkot, ha van rajta 3, 4, ill. 5 különböző színű pont, röviden 3-, 4-, ill. 5-színűnek fogunk nevezni.

A megoldásokban gyakran fogunk használni két okoskodást, ezeket segédtételként előrebocsátjuk.

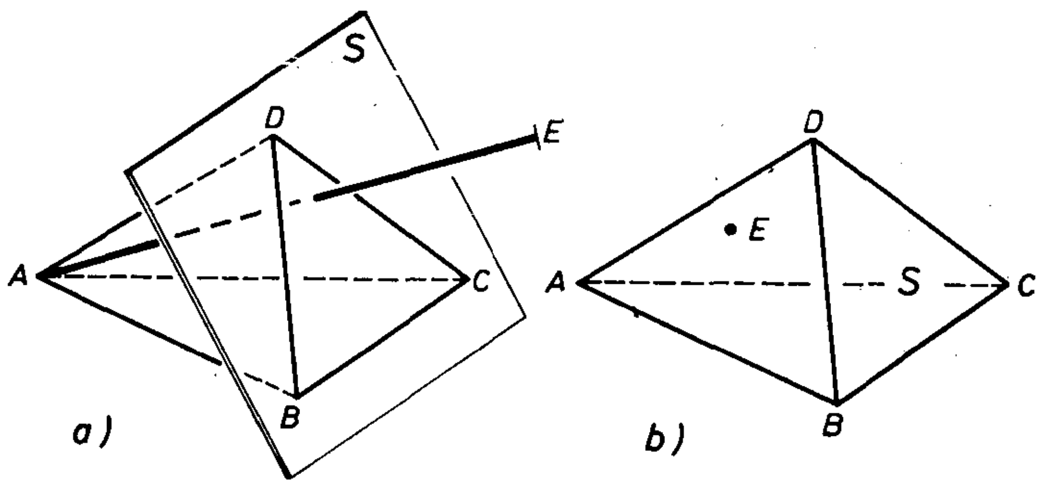
1. SEGÉDTÉTEL. *Ha a feladat feltételei teljesülnek, és van egy* 3*-színű egyenes, akkor van a térben* 4*-színű sík.*

Valóban legyen a v egyenesen mondjuk a, b és c színű pont is. Feltétel szerint van a térben d színű D pont; van továbbá olyan sík, amely tartalmazza v-t és D-t is, egy ilyen sík pedig (legalább) 4-színű.

2. SEGÉDTÉTEL. *Ha a feladat feltételei teljesülnek, továbbá egy* 3*-színű síknak és egy olyan egyenesnek, amelyiken van a maradó* 2 *színű pont, van közös pontja, akkor van a térben* 4*-színű sík.*

Bizonyítás: Legyen az S síkon a, b és c színű pont, a v egyenesen d és e színű pont és P legyen a sík és az egyenes közös pontja. Ha P színe a, b vagy c, akkor v 3-színű, és így az 1. segédtétel szerint igaz az állítás; ha pedig P d vagy e színű, akkor S 4-színű.

I. megoldás. Ha A, B, C, D, E közül valamelyik négyen át fektethető sík, akkor igaz a feladat állítása. Ha nem, akkor tekintsük az $ABCD$ tetraéder oldallapjainak a síkját. Ha valamelyiknek, pl. a B, C, D pontokat tartalmazó S síknak ellenkező oldalára esik a tetraéder és E, akkor AE metszi S-t (1/a ábra).

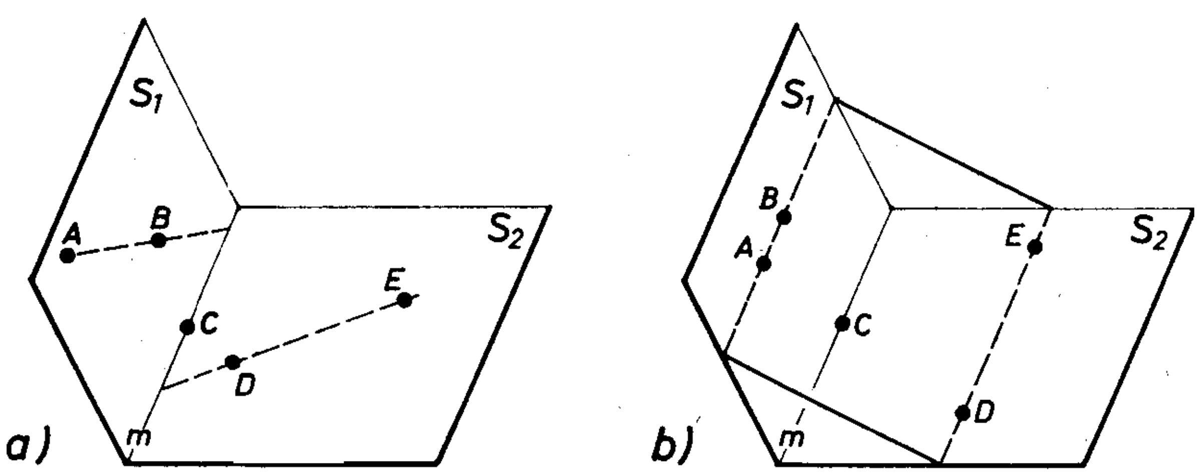


1. ábra

Ha viszont bármelyik síkot véve, annak ugyanarra az oldalára esik a tetraéder és E, akkor a tetraéder tartalmazza E-t (1/b ábra). E különbözik A-tól, mert más színű, így közelebb van S-hez, mint A, tehát ez esetben is metszi AE az S síkot. Ekkor azonban a 2. segédtétel értelmében igaz a feladat állítása.

II. megoldás. Az A, B, C-t tartalmazó S_1 és C, D, E-t tartalmazó S_2 síknak van m metszésvonala, ha nem esnek egybe, mert van közös pontjuk, C.

Ha a két sík egybeesik, akkor az 5-színű. Ha különbözők és m tartalmaz a vagy b színű pontot, akkor S_2, ha pedig d vagy e színű pontot, akkor S_1 4-színű.



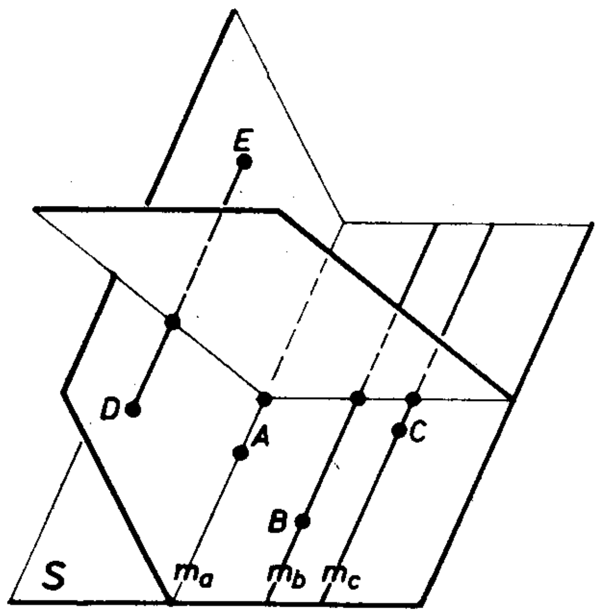
2. ábra

Ha m minden pontja c-színű, és AB vagy DE metszi m-et (2/a ábra), akkor a metsző egyenes 3-színű, és így az 1. segédtétel szerint igaz a feladat állítása.

Ha végül AB sem, DE sem metszi m-et, akkor mindkettő párhuzamos m-mel (2/b ábra), mert AB-t és m-et az S_1, DE-t és m-et az S_2 sík tartalmazza, s így kitérők nem lehetnek. Ekkor azonban AB és DE is párhuzamos, így fektethető rajtuk át sík, és ez 4-színű.

III. megoldás. Legyen S az A-t, B-t és C-t tartalmazó sík. Ha ez 4-színű, akkor igaz a feladat állítása. Ha S' 3-színű, de a DE egyenes is 3-színű, vagy ha az egyenes metszi S-et, akkor az 1., ill. a 2. segédtétel szerint igaz a feladat állítása.

Ha S 3-színű, DE 2-színű és DE párhuzamos S-sel, akkor fektessünk síkot A-n, D-n és E-n át. Ez S-et egy DE-vel párhuzamos m_a egyenesben metszi (3. ábra).

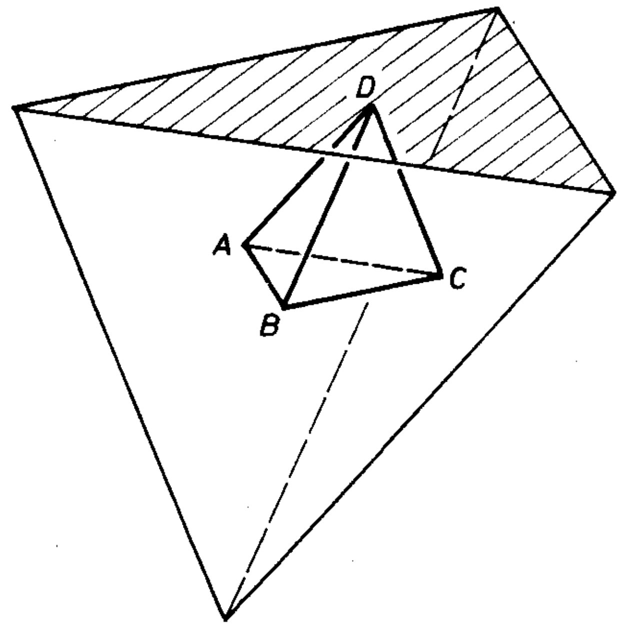


3. ábra

Ha m_a-n van b vagy c színű pont, akkor második síkunk 4-színű. Ha m_a minden pontja a színű és hasonlóan a B-n át DE-vel párhuzamosan húzott m_b egyenes b színű, a C-n át húzott m_c párhuzamos pedig c színű, akkor vegyünk egy DE-t metsző síkot. A metszéspont d vagy e színű, mert a DE egyenes 2-színű. Ez a sík metszi a párhuzamos m_a, m_b, m_c egyenest is, így 4-színű.

IV. megoldás. Ha van az ABC síkot metsző, d és e színű ponton átmenő egyenes, akkor a 2. segédtétel szerint igaz a feladat állítása. Elég tehát azt az esetet vizsgálni, ha minden e színű pont a D-n átmenő, ABC síkkal párhuzamos síkban van.

Ha hasonlóan a BCD síkot és az A ponton átmenő, e színű pontot is tartalmazó egyeneseket vizsgáljuk, akkor tovább szűkíthetjük a megvizsgálandó eseteket arra, hogy az e színű pontok legyenek rajta az A-n átmenő, BCD síkkal párhuzamos síkon is. Hasonlóan folytatva tovább, megkívánhatjuk azt is, hogy a B-n átmenő, ACD síkkal párhuzamos síkon is, valamint a C-n átmenő, ABD síkkal párhuzamos síkon is legyenek rajta az e színű pontok.



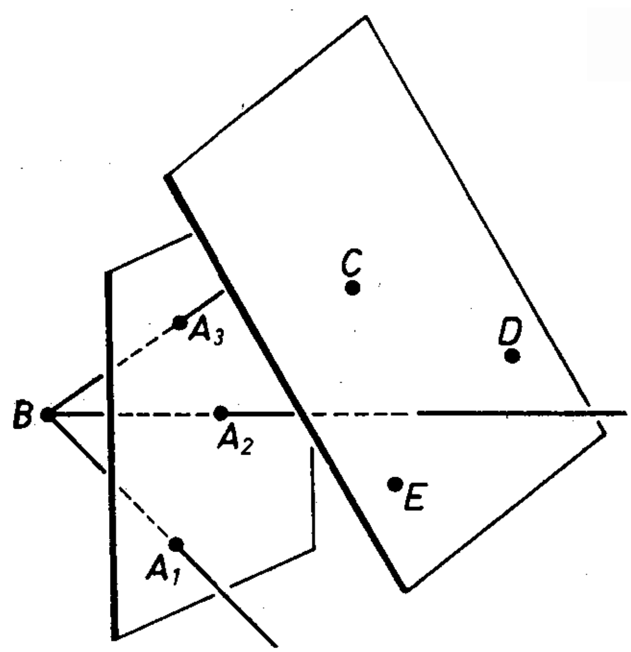
4. ábra

Ez a 4 sík azonban (az $ABCD$ tetraéderhez hasonló) tetraédert határoz meg (4. ábra), így nincs olyan pont, amelyik mindegyiken rajta lenne. Nem maradt tehát külön megvizsgálandó eset, s így mindig teljesül a feladat állítása.

Eddig különböző színű pontokból indultunk ki. A következő megoldás éppen egyező színűeket keres.

V. megoldás. Kell lennie a térben 3 nem egy egyenesen levő, azonos színű pontnak, hiszen különben az egész térnek nem lehetne több, mint 5 egyenese.

Legyenek az $A_1A_2A_3$ háromszög csúcsai a színűek. Ha minden más színű pont a háromszög síkjában van, akkor ez a sík 5-színű. Ha nem, akkor legyen a síkon kívül egy a-tól különböző – mondjuk b színű – pont B. A BA_1, BA_2, BA_3 egyenesek nincsenek egy síkban (5. ábra), tehát minden sík metsz legalább egy egyenest közülük.



5. ábra

Egy–egy c, d és e színű pontot véve, az ezeket tartalmazó sík tehát metszi a 3 egyenes valamelyikét, s így 2. segédtételünk alapján következik, hogy igaz a feladat állítása.

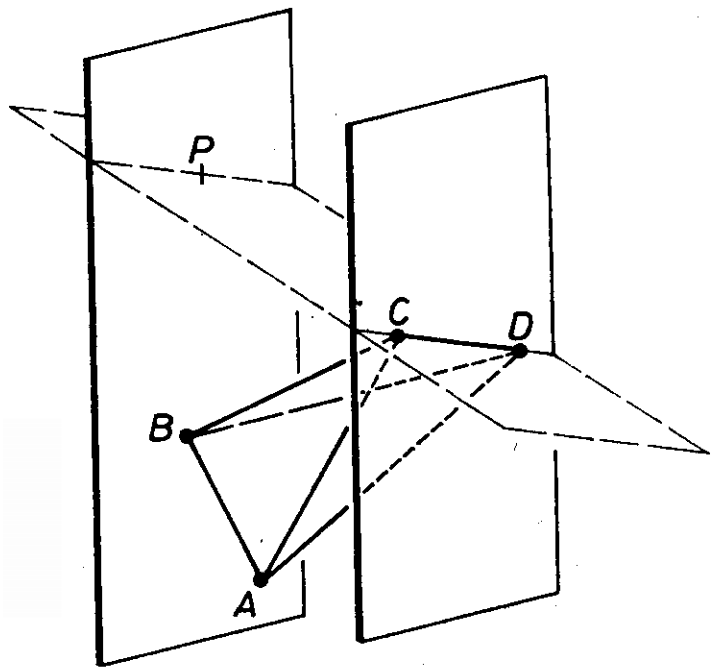
VI. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha a tér pontjai úgy vannak megszínezve, hogy egy–egy sík legfeljebb 3-színű, akkor a tér legfeljebb 4-színű.

Megjegyezzük, hogy a feltételből következik, hogy a tér minden egyenese 2-színű, hiszen ha volna 3-színű egyenes, akkor a 2. segédtétel szerint volna 4-színű sík is.

Ha 4 szín sem fordul elő, akkor nyilvánvalóan igaz az állításunk. Ha A, B, C, D színe a, b, c, ill. d, akkor a 4 pont tetraédert határoz meg, hiszen nincs 4-színű sík. Legyen P a tér tetszés szerinti pontja.

Ha P az AB vagy a CD egyenesen van, akkor az előrebocsátott megjegyzés szerint csak a vagy b színű, illetőleg csak c vagy d színű lehet.

Ha egyik egyenesen sincs rajta, akkor a P-n, A-n és B-n átmenő S_1 sík és a P-n, C-n és D-n átmenő S_2 sík egyértelműen meg van határozva. Valamelyik síkot metszi a másikban levő tetraéderél egyenese, mert AB és CD kitérő, így mindegyiken át csak egy a másikkal párhuzamos sík fektethető, és az így keletkező két sík párhuzamos. S_1-nek és S_2-nek azonban közös pontja P, így nem lehetnek párhuzamosak (6. ábra).

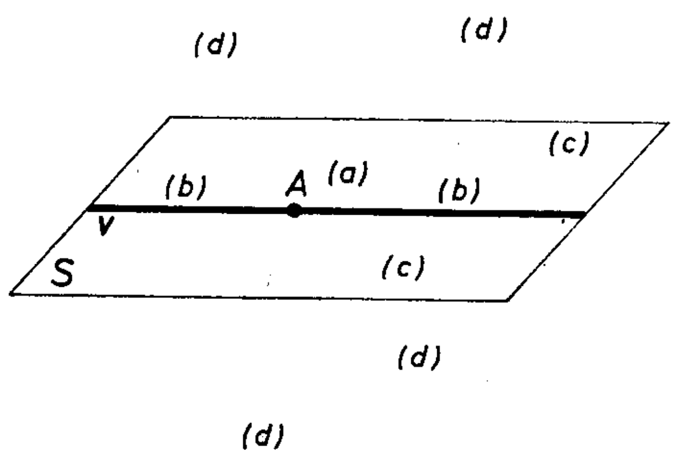


6. ábra

Ha pl. AB metszi S_2-t, a metszéspont a vagy b színű; a sík tartalmaz még c és d színű pontot, így P színe is csak e 3 pont valamelyikével lehet egyező, mert S_2 is 3-színű. Nem fordulhat elő a tér pontjainak színe közt a, b, c és d-től különböző.

A bizonyított tételből következik, hogy ha a tér több, mint 4-színű, akkor van több, mint 3-színű sík, ez pedig éppen a bizonyítandó állítás.

Megjegyzések. **1.** Volt, aki megmutatta, hogy 4-színű térnek nem feltétlenül van 4-színű síkja – ami várható is –. A térben egyetlen v egyenes pontjai legyenek a és b színűek, egy v-n átmenő S sík v-n nem levő pontjai c színűek és a tér S-en nem levő pontjai d színűek (7. ábra).



7. ábra

Itt csak a sem S-sel sem v-vel nem párhuzamos síkok lehetnének 4-színűek, ezek azonban S-et c színű és vagy a színű vagy b színű pontokban metszik, de egyszerre mindhárom színűeket nem tartalmaznak.

2. Igaz és könnyen igazolható a feladat és az 1. megjegyzés állításának a síkbeli megfelelője: Ha egy sík pontjai 4 színnel vannak kiszínezve, akkor van olyan egyenes a síkban, amelyen előfordul 3 különböző színű pont. Ha viszont a sík minden egyenese 2-színű, akkor a sík legfeljebb 3-színű. Ezzel kapcsolatban felmerül a kérdés, hogy ha a sík pontjai csak 3 színnel vannak kiszínezve, de úgy, hogy minden színnel van színezve 3 nem egy egyenesen levő pont, vajon ebből nem következik-e már 3-színű egyenes létezése. Meglepő, de *A. W. Hales* és *E. Straus* megmutatta, hogy ez nem következik. Ők megadtak olyan eljárást, amelynek segítségével úgy rendelhető a sík minden pontjához 3 szín valamelyike, hogy minden egyenes legfeljebb 2-színű legyen, de minden színhez legyen olyan háromszög, amelyiknek mindhárom csúcsa a megadott színű. Az eljárás túl bonyolult ahhoz, hogy itt ismertetni lehetne, csak azt említem meg érdekesség kedvéért, hogy kombinatorikus és számelméleti jellegű segédeszközök igen szellemes összekapcsolásával sikerül megadniuk egy kívánt tulajdonságú színezést.

3. Az egyik versenyző azt az érdekes kérdést vetette fel, hogy ha olyan 4-színű síkot keresünk, amelyiken egy előre kiválasztott szín előfordul, van-e ilyen is? Ő úgy látta, hogy nem föltétlenül található, de az általa megadott példa hibás, semmi nem derül ki belőle. A helyes válasz igenlő, hiszen van 4-színű sík a feladat állítása szerint és éppen említettük, hogy ezen van 3-színű egyenes. Legyen v-n a, b és c színű pont és legyen D és E d, ill. e színű. Ekkor bármelyik színhez jó a v-t és D-t vagy a v-t és E-t tartalmazó sík.

Síkban nem ez a helyzet. Legyenek egy v egyenes pontjai a, b, c színnel színezve, a sík többi pontjai pedig d színűek. Ekkor v az egyetlen 3-színű egyenes, d színt tartalmazó 3-színű egyenes tehát nincs.

Ha most folytatjuk a színezést a térre úgy, hogy a térnek az adott síkon kívüli pontjai mind legyenek e színűek, akkor csak a v-n átmenő síkok négyszínűek a térben. Így nincs olyan négyszínű sík a térben, amin d és e szín is szerepelne. Ha tehát egy szín helyett színpárra ismételjük meg kérdésünket, akkor már a térben is tagadó a válasz.