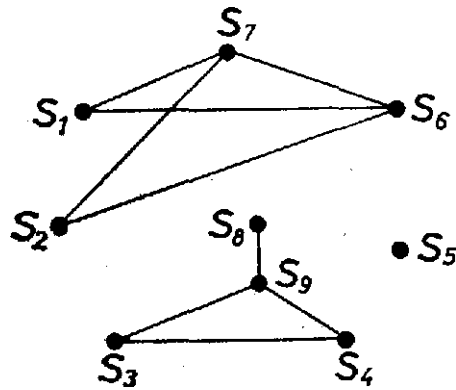


I. megoldás. Indirekt úton bizonyítjuk az állítást. Ha a feladat állítása nem volna igaz, akkor minden oszlophoz tartoznék legalább két olyan sor, amelyek csak a kérdéses oszlopbeli betűben különbözik. Minden oszlophoz válasszunk ki egy ilyen sorpárt. Ezt a kiválasztást szemléltethetjük úgy, hogy az i -edik sort egy S_i ponttal ábrázoljuk, és ha az i -edik és j -edik sor egy kiválasztott sorpár, akkor az S_i és S_j pontot összekötjük egy vonallal (7. ábra). Ezeket a vonalakat élnek fogjuk nevezni, az egész ábrát pedig gráfnak. Gráfunknak n pontja van és ugyanannyi éle. Egy ilyen gráfban mindig van kör, vagyis olyan, különböző pontokból álló $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$ sorozat, amelyben S_{i_j} -t $S_{i_{j+1}}$ -gyel ($i = 1, \dots, k - 1$) és S_{i_k} -t S_{i_1} -gyel él köti össze. Ha ugyanis egy n -pontú gráfban nincs kör, akkor annak legfeljebb $n - 1$ pontja lehet. Ezt a megoldás a végén bizonyítjuk.

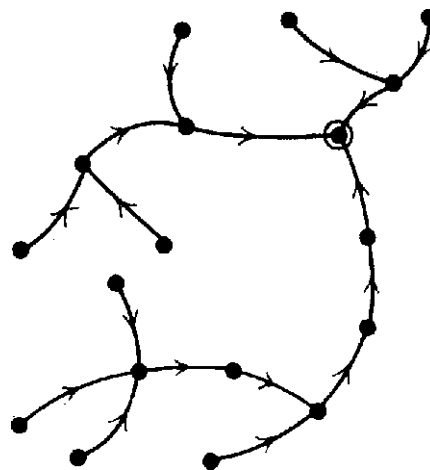


7. ábra

A fenti kör a táblázatra vonatkozóan azt jelenti, hogy az i_1 -edik és i_2 -edik sor csak egy betűben, mondjuk a j -edik oszlopbeliben különbözik, az előbbiben itt egy a_1 , az utóbbiban egy ettől különböző a_2 betű áll. Az i_2 -edik és i_3 -adik sor is csak egy betűben különbözik, és ezek egy másik oszlopban állnak, tehát az i_3 -adik sor j -edik betűje szintén a_2 . Hasonlóan az i_4 -edik, \dots , i_k -adik sor j -edik betűje is a_2 , de az i_k -adik és i_1 -edik sor is csak egy betűben tér el, és ezek is egy, a j -edikől különböző oszlopban állnak, így az i_1 -edik sor j -edik betűje is a_2 kellene, hogy legyen, holott ott az a_2 -tól különböző a_1 betű áll. Abból a feltevésből tehát, hogy bármelyik oszlop elhagyásával keletkezik két egyező sor, ellentmondásra jutottunk. Így kell olyan oszlopnak lennie, amelyet elhagyva továbbra is minden sor különböző lesz.

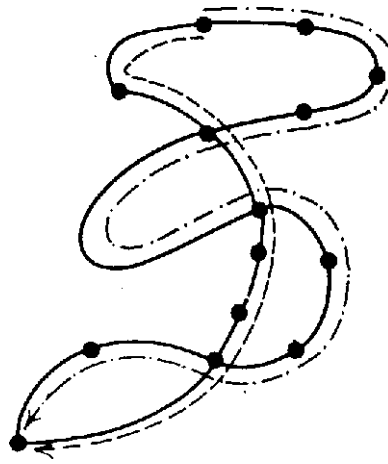
A felhasznált segédétel bizonyítása:

Egy n -pontú gráf egy vagy több összefüggő részből áll, vagyis olyanból, amelyeknek bármelyik pontjából el lehet jutni az összes többibe⁰ (7. ábra). Ha egy összefüggő gráfnak k pontja van és nincs benne kör, akkor $(k - 1)$ éle van. Gondoljuk a gráfot egy gátrendszer térképének. Minden pontban őrház van egy gáttal. Az egyik őrházban van a főőr, aki a többit irányítja (8. ábra). Nyilván minden őr el tud jutni a főőrhöz gátak mentén és csak egyféleképpen, hiszen ha volna két különböző útja is, akkor volna kör is (9. ábra). A főőr kiadja az utasítást (pl. telefonon), hogy mindenki vizsgálja meg a tőle a főőr felé vezető irányban a következő őrházig terjedő gát részt és jelentse neki, mit tapasztalt. Ő az őrhelyén várja a jelentéseket.



8. ábra

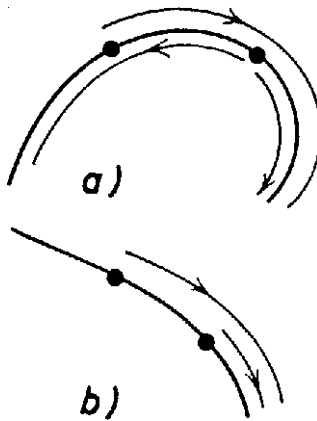
⁰Egy-egy ilyen rész állhat egyetlen pontból is.



9. ábra

Ekkor egy szakaszt sem vizsgálnak ketten, mert ha ketten vizsgálnák, akkor az egyikük a megszkott útja helyett úgy is eljuthatna a főörhöz, hogy a kérdéses szakaszra nem lép, hanem az azon feljövő társát bevárva annak az útját követné (10/a ábra). Minden gátszakaszt megnéz valaki, mert ha az egyik végén lakó őr a szakasz érintése nélkül jut el a főörhöz (vagy ő maga a főör), akkor a másik végén lakó őr útja csak az lehet, hogy végigmegy a kérdéses szakaszon és utána a szomszédos őr útját követi (10/b ábra). Eszerint $(k - 1)$ őr minden szakaszt megvizsgál és mindegyiket csak egy gátör, tehát $(k - 1)$ gátszakasz van, vagyis a gráfban $(k - 1)$ él. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Ha egy n szögpontú, kört nem tartalmazó gráf több összefüggő részre bomlik, akkor mindegyik részben eggyel kevesebb él van, mint pont, így a gráfnak $(n - 1)$ -nél kevesebb éle van.



10. ábra

II. megoldás. A következő, a feladatbelinél valamivel általánosabb állítást bizonyítjuk be teljes indukcióval. Ha egy táblázatnak legalább annyi oszlopa van, mint sora, és a táblázat minden mezejére egy betűt írunk úgy, hogy bármely két sor különbözőek, akkor van olyan oszlop, amelyiknek az elhagyása után is különböző sorok különböző módon lesznek kitöltve.

Két sor esetén van legalább két oszlop és van köztük olyan, amelyikben a két sorban különböző betűk állnak. Bármelyik további oszlopot (ha több van, akár mindet együtt is) elhagyhatjuk. Tegyük most fel, hogy n -nél kevesebb soros (és legalább ugyanannyi oszlopos) táblázatra igaz az állítás, és vegyünk egy n soros táblázatot, amelyik kielégíti az állítás feltételeit. Hagyjuk el az első oszlopot. Ha a sorok ezután is páronként különbözők, akkor az állítás igaz. Ha bizonyos sorok így egyenlővé váltak, akkor az egyenlővé vált sorok közül csak egyet-egyét tartssunk meg. Így eggyel fogyott az oszlopok száma és legalább egy sort is elhagytunk, tehát továbbra is legalább annyi oszlop van, mint sor, továbbá bármely két sor különböző. Erre a táblázatra feltevés szerint igaz az állítás: elhagyható egy oszlop úgy, hogy a sorok mind különbözők maradjanak.

Hagyjuk el a megfelelő oszlopot az eredeti táblázatból és nézzünk két sort. Ha mindkettő szerepelt a megritkított táblázatban is, akkor különbözők már akkor is, ha még az első betűket is figyelmen kívül hagyjuk. Ha viszont egy olyan csoportban vannak, amiből csak egy sor került a megritkított táblázatba, akkor az első betűk különbözők. Ekkor is találtunk tehát olyan oszlopot, amelyiknek az elhagyása után bármely két sor különböző maradt. A tulajdonság tehát öröklődik az n -soros táblázatokra is.

Megjegyzések. 1. Többen rámutattak, hogy ha csak eggyel is kevesebb oszlop van, mint amennyi sor, akkor már nem bizonyos, hogy van elhagyható oszlop, ami az ábra alapján könnyen belátható.

| | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>a</i> | <i>a</i> | <i>a</i> | <i>a</i> | <i>a</i> |
| <i>b</i> | <i>a</i> | <i>a</i> | <i>a</i> | <i>a</i> |
| <i>b</i> | <i>b</i> | <i>a</i> | <i>a</i> | <i>a</i> |
| <i>b</i> | <i>b</i> | <i>b</i> | <i>a</i> | <i>a</i> |
| <i>b</i> | <i>b</i> | <i>b</i> | <i>b</i> | <i>a</i> |
| <i>b</i> | <i>b</i> | <i>b</i> | <i>b</i> | <i>b</i> |

2. Sokan az ábécé betűinek a számából próbáltak következtetni. Ez zsákutca volt, hiszen már két jellel is ki lehet tölteni a táblázatot a feltételeknek megfelelően. Egy ilyen kitöltést kapunk, ha az előző megjegyzés táblázatát egy csupa *a*-ból álló oszloppal egészítjük ki.