I. megoldás. Ha van a feltételeket kielégítő f függvény, arra a feltétel első egyenlőtlenségét $x=0$ esetén alkalmazva

$$f(0) \leq 0$$

adódik. A második egyenlőtlenségből

$$f(x) = f(x+0) \leq f(x) + f(0).$$

Innen viszont

$$0 \leq f(0),$$

tehát csak $f(0)=0$ lehet.

Ismét a második egyenlőtlenség felhasználásával

$$0 = f(0) = f(x-x) \leq f(x) + f(-x).$$

Másrészt az első egyenlőtlenség alapján

$$f(x) \leq x \quad \text{és} \quad f(-x) \leq -x,$$

és ezeket összeadva

$$f(x) + f(-x) \leq 0.$$

A kettőből $f(x)+f(-x)=0$, $f(-x)=-f(x)$.

Végül az első egyenlőtlenségből

$$-f(x) = f(-x) \leq -x,$$

tehát (-1)-gyel szorozva

$$f(x) \geq x.$$

Ez az első feltételi egyenlőtlenséggel együtt azt adja, hogy a feltételeket kielégítő függvény csak az lehet, amelyik minden x értékhez önmagát rendeli.

Erre a függvényre a feladat egyenlőtlenségei valóban teljesülnek, mindegyik esetben egyenlőség áll fenn.

II. megoldás. Kétszer alkalmazva a második, majd kétszer az első feltételi egyenlőtlenséget, a következő összefüggés-sorozatot kapjuk egy, a feltételeket kielégítő f függvényre (ha van ilyen):

$$\begin{gathered} 0 = f(x) - f(x) = f(2x-x) - f(x) \leq f(2x) + f(-x) - f(x) \leq \\ \leq f(x) + f(x) + f(-x) - f(x) = f(x) + f(-x) \leq f(x) - x \leq x - x = 0. \end{gathered}$$

Ez csak úgy állhat fenn, ha minden közbülső kifejezés értéke is 0, így többek közt

$$f(x) - x = 0, \qquad f(x) = x.$$

Az így értelmezett függvény valóban kielégíti a követelményeket.