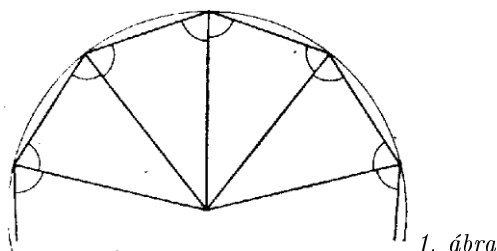


Legyen a gúla alapja az $A_1A_2\dots A_n$ sokszög (n páratlan egész szám), az alaplappal szemközti csúcs B . Feltétel szerint A_1, A_2, \dots, A_n egyenlő távol van B -től, tehát egy B középpontú gömbön helyezkedik el; továbbá az alaplap síkjában is van, tehát rajta van a két felület metszésvonalán, egy körön. Az alaplap tehát húrsokszög.

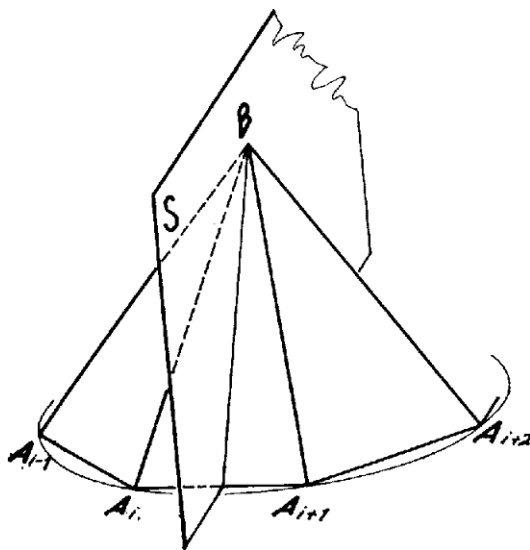
Elég megmutatni, hogy a sokszög oldalai egyenlők. Valóban, ha ez igaz, akkor összekötve minden csúcsot a körülírt kör középpontjával, egybevágó egyenlő szárú háromszögekre bontjuk a sokszöget (1. ábra). Ebből következik, hogy a sokszög szögei is egyenlők (a háromszögek száraival szemközti szög kétszerese mindegyik).



1. ábra

Azt mutatjuk meg, hogy az alaplap második szomszéd oldalai egyenlők. Páratlan oldalú sokszög esetén ebből következik, hogy minden oldal egyenlő, mivel minden oldalról a második szomszédjára térve át páratlan oldalszám esetén bejárjuk az összes oldalt.

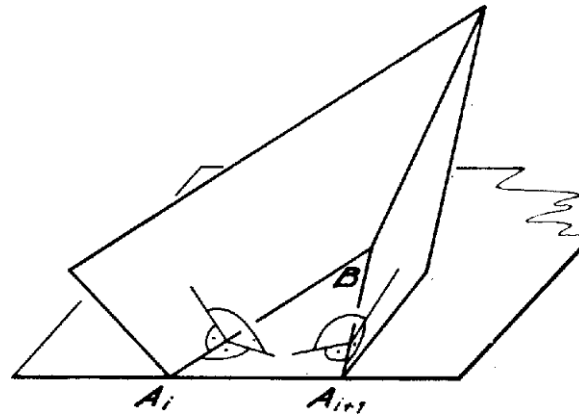
Tekintsük az A_iA_{i+1} élt felező, rá merőleges S síkot. Ez az A_i -től és A_{i+1} -től egyenlő távolságra levő pontok halmaza. Mivel $BA_i = BA_{i+1}$, így S átmegy B -n (2. ábra). Ha tükrözünk S -re, A_i és A_{i+1} helyet cserél, az alaplap síkja pedig önmagába megy át, mivel a sík merőleges S -re. Ugyancsak önmagukba mennek át a B középpontú gömbök is. Ezért önmagába megy át a tükrözéskor az alaplap köré írt kör is.



2. ábra

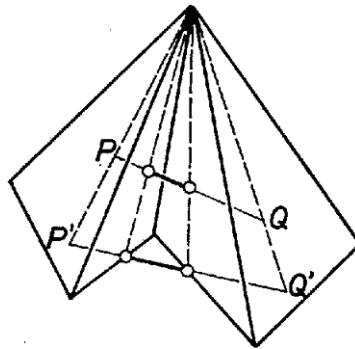
Megmutatjuk, hogy az A_{i-1} csúcs¹ tükörképe A_{i+2} . Jelöljük A_{i-1} tükörképét C -vel. Ez is a körülírt körön van. A tükrözés folytán az $A_{i-1}A_iB$ és $A_iA_{i+1}B$ lapok szöge megegyezik a $CA_{i+1}B$ és $A_{i+1}A_iB$ lapok szögével. A gúla konvex volta miatt A_{i-1} , A_{i+2} és C az $A_iA_{i+1}B$ síknak ugyanazon az oldalán fekszik. De az $A_{i+1}B$ egyenes határolta, azt tartalmazó félsíkhöz a határegyenesé mentén csak egy olyan félsík illeszthető, amelyik vele adott szöget zár be és az $A_iA_{i+1}B$ sík megadott oldalán fekszik (3. ábra). Így C és A_{i+2} egy síkban fekszik, rajta van egy nem ebben a síkban levő körön és különbözik a sík és kör A_{i+1} metszéspontjától, tehát kell, hogy egybeessenek. $A_{i-1}A_i$ és $A_{i+1}A_{i+2}$ tehát egymás tükörképei, és így egyenlők. Ez igaz $i = 1, 2, \dots, n$ -re, vagyis az alaplap mindegyik oldala egyenlő a rá következő másodikkal. Mint láttuk, ebből következik, hogy az alap szabályos sokszög.

¹ Ha $i = n$, A_{i+1} -en A_1 értendő, A_{i+2} -n A_2 , $i = 1$ esetén pedig A_{i-1} -en A_n .



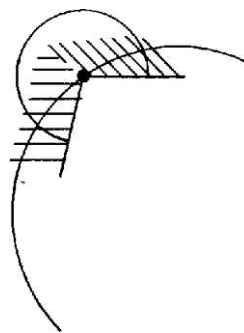
3. ábra

Megjegyzések. 1. Az oldalélek egyenlőségéből már következik a gúla konvex volta, pl. a következők alapján: ha nem volna konvex a gúla, ez azt jelentené, hogy van olyan P és Q belső pontja, amelyeket összekötő szakasznak van pontja a gúlán kívül. Vetítsük a PQ szakaszt az alappal szemközti csúsból az alap síkjára. A $P'Q'$ vetület olyan szakasz volna (4. ábra), amelynek végpontjai az alaplap belsejében vannak, de van az alaplapon kívül levő pontja. Így az alaplap konkáv sokszög volna.



4. ábra

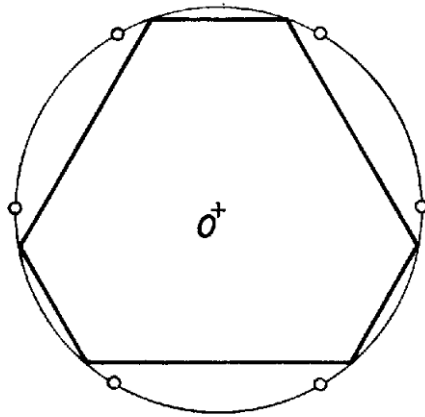
Húrsokszög viszont nem lehet konkáv, hiszen akkor volna a belső szögei közt 180° -nál nagyobb. Annak csúcsa körül elég kis sugarú kört rajzolva ennek a szögtartományba eső (konkáv) körcikke a sokszög belsejében volna (5. ábra). De ennek a körcikknek volna a sokszög köré írt körön kívül eső pontja, márpedig egy húrnégyszögnek nincs a körön kívüli pontja.



5. ábra

Egy ilyen jellegű bizonyítással azonban nem kívánta a szervező bizottság megterhelni a versenyzők rendelkezésére álló időt.

2. Többen rámutattak, hogy páros oldalszámú gúlára nem feltétlenül teljesül a feladat állítása. A legegyszerűbb ellenpélda erre egy téglalap alapú „egyenes” gúla. Az alappal szemközti csúcs merőleges vetülete a téglalap középpontja. Általában tekintsük egy O középpontú körbe írt $2n$ oldalú szabályos sokszöget, ($n \geq 2$) és távolítsuk minden második oldalát ugyanannyival a középponttól, majd a szomszédos végpontokat kössük össze (6. ábra). Könnyű látni, hogy az így keletkezett $2n$ -szög szögei is egyenlők. Összekötjük a sokszög csúcsait az O pontban a sokszög síkjára emelt merőleges egy P pontjával. A keletkezett gúla szomszédos lapjai egyenlő szöget zárnak be, amint az az alapélek felezőpontjában állított, az élre merőleges síkra történő tükrözéssel belátható. A gúla alapja azonban nem szabályos sokszög.



6. ábra