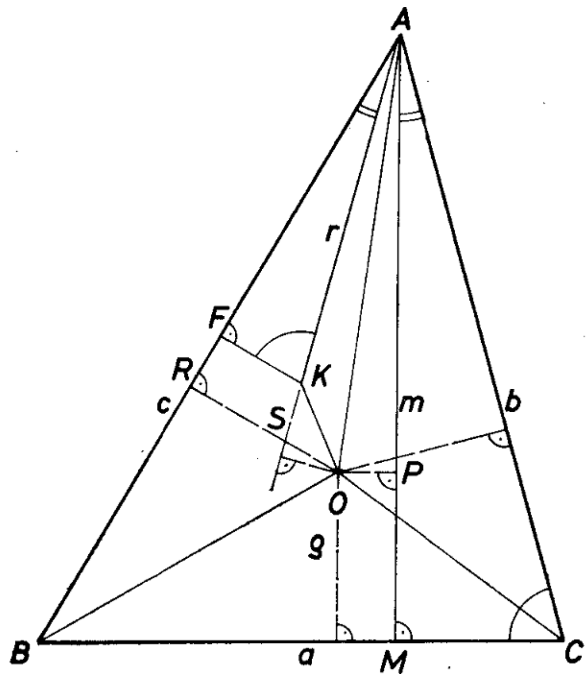
I. megoldás. A legkisebb oldalra bocsátott magasság a legnagyobb, mivel az oldal és a rábocsátott magasság szorzata a háromszög területének a kétszeresét adja. Legyen az ABC háromszög legkisebb oldala vagy a legkisebbek egyike a $BC = a$ oldal, a rábocsátott magasság $AM = m$ (2. ábra).

A háromszög A-nál levő belső szöge nem nagyobb a másik két belső szögnél, mert a háromszögben kisebb oldallal szemben fekvő szög kisebb.

A háromszögbe írt kör O középpontja a belső szögfelezők metszéspontja. Bocsássunk belőle merőlegest az oldalakra és m-re, az utóbbi talppontja legyen P. Ekkor PM egyenlő a beírt kör sugarával. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy AP legalább akkora, mint a háromszög köré írt kör sugara.

A körülírt kör K középpontja az A-ból induló háromszögoldalak és az O-ból rájuk bocsátott merőlegesek határolta négyszög pontja. Valóban, egyrészt nem lehet K az ABC háromszögön kívül, mert a háromszög nem tompaszögű. Másrészt az ABO és ACO háromszög A-nál levő szöge nem nagyobb a B-nél, ill. C-nél levő szögnél, így AO vetülete nem kisebb, mint OB-é, ill. OC-é a harmadik oldalon. Ez más szóval azt jelenti, hogy az említett négyszög határához tartozik az AB és AC oldal felezőpontja is; így az ezekben emelt merőlegesek metszéspontja, vagyis K is a négyszöghöz tartozik.



2. ábra

Jelöljük AB felezőpontját F-fel, O vetületét AB-n R-rel. A betűzés megfelelő választásával feltehetjük, hogy az AOR háromszög tartalmazza K-t. Az $AKF\sphericalangle$ a háromszög köré írt kör ACB kerületi szögéhez tartozó középponti szög fele és így egyenlő vele, ha $K \neq F$. Ekkor viszont

$$FAK\sphericalangle = MAC\sphericalangle,$$

s így AO felezi a KAM szöget is. Ez akkor is igaz, ha $K = F$, mert ekkor $ACB\sphericalangle$ derékszög, s így $M = C$.

Megállapításunkból az következik, hogy a körülírt kör AK sugarának AO-ra vonatkozó tükörképe AM-re esik. Megmutatjuk még, hogy az $AKO\sphericalangle$ tompaszög, ha K különbözik O-tól és R-től. Ebből következik, hogy K tükörképe az AP szakaszra esik, tehát

$$AK < AP,$$

amint állítottuk.

Jelöljük S-sel az AK meghosszabbításának metszéspontját OR-rel, ekkor

$$AKO\sphericalangle \geq ASO\sphericalangle \geq ARO\sphericalangle = 90^\circ,$$

mint a KSO, ill. ARS háromszög külső szöge, és mind a két helyen csak akkor állhat egyenlőség, ha K, S és R egybeesik. Ebben az esetben F is egybeesik ezekkel a pontokkal. Ekkor az ABC háromszög derékszögű C-nél és egyenlő szárú. Így K tükörképe AO-ra P, tehát m a két körsugár összegével egyenlő.

Ha végül K és O egybeesik, akkor a háromszög szabályos. Ebben az esetben is nyilván egyenlőség áll fenn.

Jegyzet. Az ábra alapján könnyen nyerhetünk két összefüggést, amelyeket a következő megoldásban felhasználunk.

1. Az ábrán látható jelöléseket használjuk. Az ACM és az AKF derékszögű háromszögek hasonlók, mert – mint láttuk – C-nél, ill. K-nál levő szögük egyenlő. Ebből következik az oldalak arányára a

$$\frac{b}{m}=\frac{r}{c/2}$$

egyenlőség. Mindkét oldalt megszorozva acm-mel, azt kapjuk, hogy

$$abc=2amr=4tr,$$

ahol t a háromszög területét jelenti.

2. Fejezzük ki m^2-et az ACM és ABM derékszögű háromszögből:

$$m^2=b^2-CM^2=c^2-(a-CM)^2.$$

A második egyenlőségből

$$2aCM=a^2+b^2-c^2.$$

Az első egyenlőséget $4a^2$-tel megszorozva a bal oldalon $16t^2$ keletkezik. A jobb oldalon felhasználjuk az éppen nyert összefüggést és azután szorzattá alakítunk:

$$\begin{aligned}16t^2&=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)=\\&=\left[(a+b)^2-c^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]=(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b).\end{aligned}$$

A kerület felét s-sel jelölve, ezt így írhatjuk:

$$t^2=s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Ez a Heron-formula néven ismert területképlet.

II. megoldás. Az eddigi jelöléseket használjuk, a háromszögbe írt kör sugarát ϱ-val jelöljük. Feltehetjük, hogy

$$a\le b\le c.$$

Ekkor az $m-\varrho-r$ különbségről kell megmutatnunk, hogy nem negatív és megállapítani, milyen esetekben 0. A szereplő adatokat az oldalakkal és a területtel fejezzük ki. Ismeretes, hogy $t=\varrho s$, így

$$m-\varrho=\frac{2t}{a}-\frac{t}{s}=\frac{t(b+c)}{as}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(b+c)}{at}.$$

Az utolsó lépésben bővítettünk t-vel, felhasználtuk Heron képletét (lásd a fenti 2. jegyzetet), és egyszerűsítettünk s-sel. Ebből levonjuk még az $r=abc/4t$ értéket (lásd a fenti 1. jegyzetet), és bővítünk 2-vel:

A számlálóról be kell látnunk, hogy nem lehet negatív. A kisebbítendő középső két tényezőjének a szorzata $a^2-(c-b)^2$. A másik két tényező szorzatának a^2-szereséből a kivonandót is levonva a számláló így alakítható tovább, az első tagból levonva, a másodikhoz hozzáadva $a^2(c-b)(c+b-a)$-t:

(4)
$$\begin{aligned}&a^2\big(b^2+c^2-a(b+c)\big)-(c^2-b^2)(c-b)(b+c-a)=\\&=a^2\left[b^2+c^2-a(b+c)-\big(c^2-b^2-a(c-b)\big)\right]+(a^2+b^2-c^2)(c-b)(b+c-a)=\\&=2a^2b(b-a)+(a^2+b^2-c^2)(c-b)(b+c-a).\end{aligned}$$

Itt az oldalak nagyságrendjére tett feltevés szerint sem az első tag utolsó tényezője, sem a második második tényezője nem lehet negatív. A második tag első tényezője C-nél derékszögű háromszögre 0, hegyesszögű háromszögre pedig pozitív; ugyanis ha két háromszög két oldalpárja egyenlő, akkor a harmadik oldal abban a háromszögben kisebb, amelyikben az egyenlő oldalak közti szög kisebb. A többi tényező pozitív. Ezzel beláttuk, hogy $m-\varrho-r\ge 0$.

Csak úgy lehet 0 a kifejezés, ha a (4) utolsó alakjában mind a két tag 0. Ehhez egyrészt $a=b$ kell hogy legyen, másrészt vagy $b=c$, vagy $a^2+b^2=c^2$. A legnagyobb magasság tehát a szabályos háromszögnél és az egyenlő szárú derékszögű háromszögnél egyenlő a háromszög köré és a háromszögbe írt kör sugarának összegével.

III. megoldás. A versenyzők nagy része a következő összefüggést használta fel a feladat megoldására. A háromszög köré írt kör középpontjának az a, b, c oldaltól mért távolságát rendre d_a, d_b, d_c-vel jelölve

$$d_a+d_b+d_c=r+\varrho.$$

A háromszög kétszeres területét kiszámíthatjuk úgy is, mint az AKB, BKC, CKA háromszögek kétszeres területének összegét. Így kapjuk a következő összefüggést:

$$am = 2t = ad_a + bd_b + cd_c \geq a(d_a + d_b + d_c) = a(r + \varrho),$$

ahol a ismét a legkisebb oldalt, vagy a legkisebbek egyikét jelöli, s így m a magasságok közt előforduló legnagyobb érték. Itt oszthatunk a pozitív a értékkel, és megkapjuk a kívánt egyenlőtlenséget. Nyilvánvalóan egyenlőség áll fenn, ha a három oldal egyenlő, vagyis a szabályos háromszögnél. Fennállhat azonban egyenlőség úgy is, hogy valamelyik d nulla, és a másik kettő szorzója egyenlő. Ez valóban bekövetkezhet, mert a körülírt kör középpontján átmenő oldal a kör átmérője, tehát a háromszög legnagyobb oldala. Ebben az esetben a háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög.

Jegyzet. Hasonlóan látható, hogy a legkisebb magasság viszont nem nagyobb a két körsugár összegénél. Itt már csak a szabályos háromszög esetén áll fenn egyenlőség.

A felhasznált összefüggés belátható például trigonometriai átalakítások segítségével. (Lásd pl. Érdekes matematikai gyakorló feladatok, IV., 126. feladat, megoldása 139–141. old.)