A következő szemléletes meggondolás adhat ötletet a megoldáshoz: (1) egy ellipszis vagy hiperbola egyenlete, és feltétel szerint van rajta egy racionális koordinátájú pont. Húzzunk ezen át racionális meredekségű egyenest. Az ezzel való további metszéspont megkeresése egy racionális együtthatós, másodfokú egyenletre vezet, amelyiknek egyik gyöke racionális szám, tehát a másiknak is annak kell lennie. Ennek az alapgondolatnak a keresztülvitele a következő megoldás.

Legyen x_0, y_0 olyan racionális számpár, amelyre

$$ax_0^2 + by_0^2 = 1, \tag{2}$$

és keressünk egy olyan további x, y megoldást, amelyre teljesül az

$$y = y_0 + m(x - x_0) \tag{3}$$

összefüggés egy adott m racionális számmal. Behelyettesítve ezt (1) két oldalának a különbségébe, azt (2) felhasználásával a következőképpen alakíthatjuk át:

$$\begin{aligned} &ax^2 + by_0^2 - 1 + 2by_0m(x - x_0) + bm^2(x - x_0)^2 = \\ &= (x - x_0)\big(a(x + x_0) + 2bmy_0 + bm^2(x - x_0)\big) = \\ &= (x - x_0)\big((a + bm^2)x + 2bmy_0 + (a - bm^2)x_0\big). \end{aligned}$$

Ennek 0-helye az első tényező eltűnéséből adódó x_0-on kívül, továbbá a hozzá tartozó y érték, amennyiben $a+bm^2 \neq 0$,

$$x = \frac{bm^2 - a}{bm^2 + a}x_0 - \frac{2bm}{bm^2 + a}y_0, \quad y = \frac{-2am}{bm^2 + a}x_0 - \frac{bm^2 - a}{bm^2 + a}y_0.$$

Az átalakításokat fordított irányban végezve adódik, hogy x és y közt fennáll (3), és hogy kielégítik az (1) egyenletet.

Be kell még látnunk, hogy ilyen módon végtelen sok megoldást kapunk, de ez nyilvánvaló. Legyen két különböző racionális m_1 és m_2 értékhez tartozó megoldás (x_1, y_1) és (x_2, y_2). Ha $x_1 \neq x_2$, akkor két különböző megoldást kaptunk, ha pedig $x_1 = x_2$, akkor (3)-ból látható, hogy $y_1 \neq y_2$.

Megjegyzések. 1. Meggondolásaink akkor is helyesek, ha a és b valamelyike, pl. $b = 0$. Ekkor nyilván $a > 0$, és formuláink azt adják, hogy $x = -x_0$, $y = y_0 - 2mx_0$. Ez utóbbi minden racionális számot felvesz értékül, ha m végigfut a racionális számokon, és esetünkben minden ilyen számpár megoldás is (ugyanígy az összes (x_0, y) számpárok is).

2. Sok más meggondolás is elvezet végtelen sok megoldás megtalálásához. Képezzük pl. (1) és (2) megfelelő oldalainak a különbségét:

$$a(x - x_0)(x + x_0) + b(y - y_0)(y + y_0) = 0.$$

Ha itt pl. $b \neq 0$, és olyan megoldást keresünk, amelyre $y \neq -y_0$, akkor alkalmas t racionális számmal $x - x_0 = b(y+y_0)t$ alakban írható. Ekkor $y - y_0 = -a(x + x_0)t$, és a kettőből kifejezve x-et és y-t

$$x = \frac{1 - abt^2}{1 + abt^2}x_0 + \frac{2bt}{1 + abt^2}y_0,$$

$$y = -\frac{2at}{1 + abt^2}x_0 + \frac{1 - abt^2}{1 + abt^2}y_0.$$

Nem nehéz belátni, hogy ezek minden t értékre kielégítik (1)-et, és végtelen sok számpárt állítanak elő, hiszen pl. egy x értéket csak két t érték mellett kaphatunk.

Bár az alapgondolat és a számolás különbözött a megoldásban követettől, a megoldás mégsem különbözik lényegesen, hiszen az $(x - x_0)$-ra felírt összefüggés az $1/bt$ meredekségű és az $(x_0, -y_0)$ ponton – amelyik rajta van a görbén – átmenő egyenes egyenlete.

3. Egy versenyző észrevette az

$$(ax^2 + by^2)(u^2 + abv^2) = a(xu + byv)^2 + b(axv - yu)^2$$

azonosságot. Ennek felhasználásával (2)-ből (1) végtelen sok megoldását nyerjük, ha találunk az

$$u^2 + abv^2 = 1$$

egyenletnek végtelen sok racionális számpárokból álló megoldását. Ez nem nehéz az

$$abv^2 = (1 - u)(1 + u)$$

átalakítás alapján. Keressük az $1-u$ tényezőt vw alakban, akkor $1+u=abv/w$. A kettőből kifejezve u-t és v-t, azonosságunk alapján (1) megoldásait

$$x=\frac{ab-w^2}{ab+w^2}x_0+\frac{2bw}{ab+w^2}y_0, \quad y=\frac{2aw}{ab+w^2}x_0-\frac{ab-w^2}{ab+w^2}y_0$$

alakban kapjuk. Ezen az úton eleve világos, hogy ezek (1) megoldásai, és könnyen látható ismét, hogy végtelen sok különböző megoldást kapunk.

Itt a meggondolásból nem nyilvánvaló, hogy minden megoldást megkaptunk, de könnyen látható, hogy a feladatra közölt megoldásban egy tetszés szerinti $m\neq 0$ értékhez tartozó (x,y) számpárt megkapunk, éspedig $w=a/m$ paraméterértéknél, tehát lényegében minden megoldás kiadódik.