I. megoldás. 1. Megmutatjuk, hogy *az M magasságpontnak a BC oldal F_1 felezőpontjára vonatkozó M_1 tükörképe az ABC háromszög köré írt körön van, annak éppen az A-val átellenes pontja.*

Ebből már könnyen fog következni a feladat állítása.

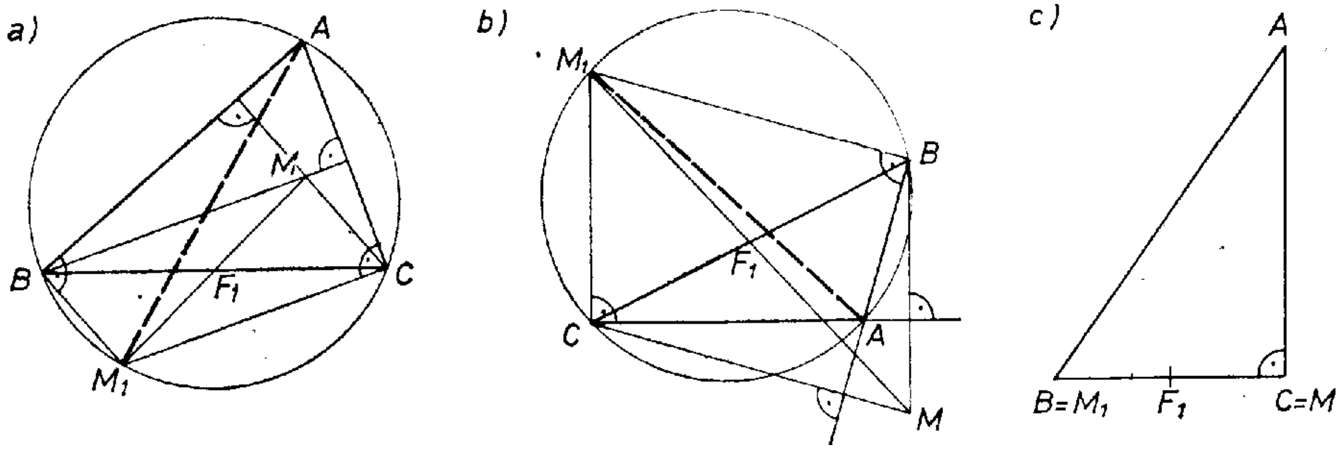
B és C egymás tükörképe F_1-re. Ha M különbözik a B és C csúcstól, akkor

$$M_1B \| MC \qquad \text{és} \qquad M_1C \| MB,$$

mert pontra való tükrözés egyenest vele párhuzamos egyenesbe visz át (1*a* és *b* ábra). Azonban MC az AB oldalra bocsátott magasság egy szakasza, MB pedig az AC oldalra bocsátotté, így

$$ABM_1\sphericalangle = ACM_1\sphericalangle = 90^\circ,$$

tehát B és C rajta van az AM_1 mint átmérő fölé rajzolt körön. Az ABC háromszög köré rajzolt kör azonban egyértelműen meg van határozva, így azonos az AM_1 átmérőjű körrel, tehát M_1 a háromszög köré írt körnek A-val átellenes pontja, amint állítottuk.



1. ábra

Az állítás akkor is igaz, ha pl. $M = C$ (1*c*. ábra). Ez ugyanis azt jelenti, hogy

$$AC \perp BC,$$

a háromszög derékszögű. M tükörképe F_1-re B-vel esik egybe és ez valóban az A-val átellenes pont.

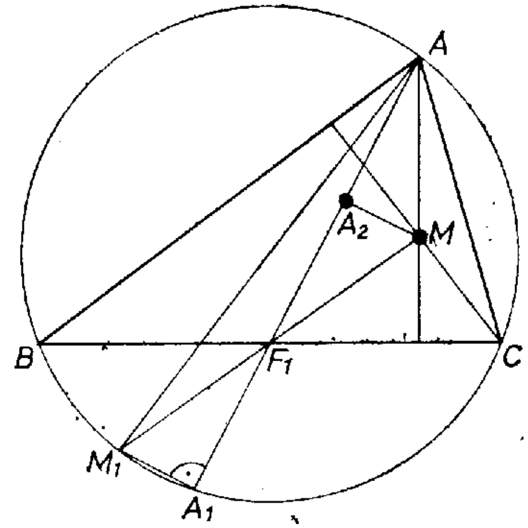
2. A bizonyított tételből következik, hogy A_2, B_2 és C_2 az M pont merőleges vetülete a háromszög súlyvonalain. Elég ezt pl. A_2-re belátni. Ha $M_1 \neq A_1$, akkor

$$F_1A_1M_1\sphericalangle = AA_1M_1\sphericalangle = 90^\circ,$$

mert AM_1 átmérő (2. ábra). Tükrözve F_1-re, kapjuk, hogy

$$F_1A_2M\sphericalangle = 90^\circ,$$

és ezt állítottuk. Ha $A_1 = M$, akkor $A_2 = M$, tehát ekkor is igaz az állítás.



2. ábra

Tudjuk, hogy a háromszög súlyvonalai egy ponton mennek keresztül, a háromszög S súlypontján. Ha $S \neq M$, akkor A_2, B_2 és C_2 az SM átmérőjű körön van. Ha $S = M$ – ez csak a szabályos háromszögre teljesül –, akkor egybeesik velük A_2, B_2 és C_2 is és van végtelen sok kör, amelyik mindegyik pontot tartalmazza.

Azt bizonyítottuk tehát be, a feladat állításán túlmenve, hogy minden háromszöghöz van olyan kör, amelyik átmegy A_2-n, B_2-n, C_2-n, a háromszög magasságpontján és súlypontján.

II. megoldás. Jelöljük a háromszög köré írt kör középpontjából az A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 és M ponthoz mutató vektorokat rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{c}_2$, ill. $\mathbf{m}$-mel. Közülük az első hat hossza egyenlő, a kör sugara.

Megmutatjuk, hogy

$$\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

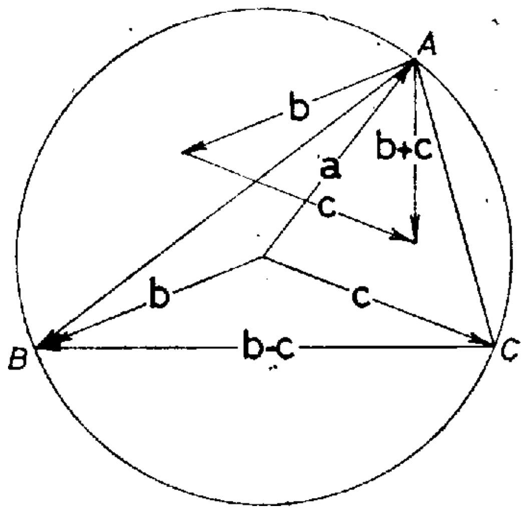
Jelöljük N-nel azt a pontot, amelynek a jobb oldali vektor a helyvektora (3. ábra). Ekkor

$$\overrightarrow{AN} = \mathbf{b} + \mathbf{c}, \qquad \overrightarrow{CB} = \mathbf{b} - \mathbf{c}.$$

Ha ezek egyike sem $\mathbf{0}$ nulla-vektor, akkor merőlegesek, mert egy olyan rombusz átlóvektorai, amelynek az oldalvektorai felváltva $\pm\mathbf{b}$-vel, ill. $\pm\mathbf{c}$-vel egyenlők. Vagy mert skaláris szorzatuk:

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c}|^2 = 0.$$

Az AN egyenes tehát a BC-re merőleges magasság egyenese.



3. ábra

Mivel B és C különböző pontok, így

$$\mathbf{b} - \mathbf{c} \neq \mathbf{0}.$$

Ha $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, akkor $N = A$, s így ekkor is rajta van N az A-ból húzott magasságvonalon. Ugyanígy látható, hogy N rajta van a másik két magasságvonalon is, tehát azonos a háromszög magasságpontjával. Ezt akartuk belátni.

Azt, hogy A_2 az A_1 tükörképe a BC szakasz középpontjára, a következő vektoregyenlőség fejezi ki:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Innen

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a}_1.$$

Most már könnyen láthatjuk, hogy

$$(1) \qquad MA_2 \perp AA_1,$$

ugyanis

$$\overrightarrow{MA_2} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{m} = -(\mathbf{a} + \mathbf{a}_1), \qquad \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}.$$

$\mathbf{a}$ és $\mathbf{a}_1$ egyenlő hosszú vektorok. Ebből a fentebbi meggondoláshoz hasonlóan adódik, hogy vagy $M = A_2$, vagy teljesül az (1) összefüggés. Ebből pedig következik a feladat állítása, amint azt az I. megoldásban láttuk.

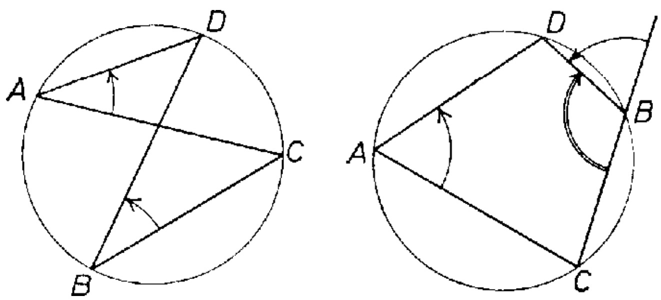
Megjegyzés. Érdekes megoldás adódik a feladatra komplex számok segítségével. A komplex számok eközben csak arra fognak szolgálni, hogy átfogalmazzuk segítségükkel az állítást egy könnyen belátható geometriai állítássá.

A komplex számokról a következőket használjuk fel. Ugyanazok a számolási szabályok érvényesek rájuk, mint a valós számokra.

A komplex számok a sík vektoraival szemléltethetők. Ebben a szemléltetésben az összeadást a vektorösszeadás szemlélteti.

Két komplex szám hányadosát ábrázoló vektor hajlásszöge a pozitív abszcisszatengelyhez az osztó irányszögével kisebb mint az osztandó irányszöge.

A valós számokat az abszcissza-tengelyen szemléltetjük, ezek irányszöge tehát 0° vagy 180° (vagy ezektől 360° egy egész többszörösével különbözhet).



4. ábra

Legyen most már A, B, C, D a sík négy különböző pontja, a helyvektoraik által szemléltetett komplex számok a, b, c, d. Ha a négy pont egy körön van, akkor a $CAD\sphericalangle$ és $CBD\sphericalangle$ vagy egyenlő és egyirányú, vagy 180°-ra egészíti ki egymást és ellentétes irányú (4. ábra). Ugyanez áll tehát a

$$\frac{d-a}{c-a} \qquad \text{és} \qquad \frac{d-b}{c-b} \tag{2}$$

komplex számok irányszögére is. Ez azt jelenti, hogy a

$$\frac{d-a}{c-a} : \frac{d-b}{c-b} = \frac{(d-a)(c-b)}{(c-a)(d-b)} \tag{3}$$

hányados irányszöge 0° vagy 180°, ez a szám tehát valós. Ez akkor is igaz, ha $d=a$, vagy $c=b$. Ez azt jelenti, hogy legalább 2 pont egybeesik. Ekkor pedig a pontokon át lehet kört rajzolni, kivéve ha három egy egyenesen levő pontunk van.

Tegyük most fel, hogy a (3) szám 0-tól különböző és valós. Ekkor a (2) alatti (komplex) számok is 0-tól különbözők és irányszögeik vagy egyenlők vagy 180°-kal különböznek. Lehet mind a két szám valós, de ha egyik nem az, akkor a másik sem az.

Ha mind a kettő valós, akkor A, C és D is, B, C és D is egy egyenesen van, tehát a négy pont egy egyenesen van. Ha viszont a (2) számok nem valósak, akkor a szögekre nyert összefüggés éppen azt jelenti, hogy $ABCD$ húrnégyszög, a négy pont egy körön van. A következőt nyertük tehát:

A (3) komplex szám akkor és csak akkor valós, ha A, B, C, D egy körön vagy egy egyenesen van. Az alábbiakban ezt fogjuk felhasználni.

III. megoldás (komplex számok felhasználásával). Válasszuk a háromszög köré írt kör középpontját a komplex számsík 0 pontjának és az A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, M pontok ábrázolják rendre az a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, m komplex számokat. Ekkor, mint az előző megoldásban, adódnak az

$$a_2 = b + c - a_1 \qquad b_2 = c + a - b_1, \qquad c_2 = a + b - c_1 \qquad m = a + b + c$$

összefüggések. Ha a négy pont egy körön van, akkor a következő komplex szám valós:

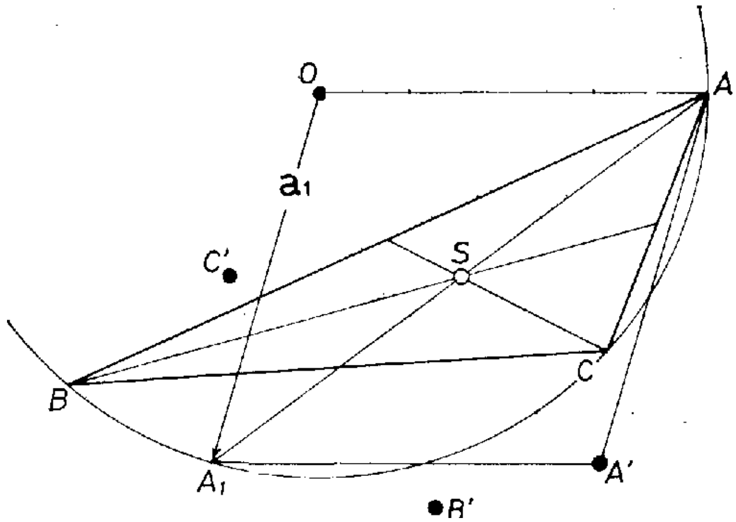
$$\frac{(a_2-c_2)(b_2-m)}{(b_2-c_2)(a_2-m)} = \frac{\big(c+c_1-(a+a_1)\big)\big(-(b+b_1)\big)}{\big(c+c_1-(b+b_1)\big)\big(-(a+a_1)\big)} = \frac{\big(a+a_1-(c+c_1)\big)(b+b_1)}{\big(b+b_1-(c+c_1)\big)(a+a_1)}. \tag{4}$$

Az utolsó tört valós volta viszont azt jelenti, hogy az

$$a+a_1, \qquad b+b_1, \qquad c+c_1 \qquad \text{és} \qquad 0$$

komplex számokat ábrázoló pontok egy körön vagy egy egyenesen vannak. Az utolsó pont a háromszög köré írt kör középpontja.

Mivel a és a_1 abszolút értéke (az ábrázoló vektorok hossza) egyenlő, így a 0-t, a-t, a_1-et és $(a+a_1)$-et ábrázoló pontok egy rombusz csúcsai. Ekkor azonban az $(a+a_1)$-et ábrázoló pont az O pont tükörképe a rombusz másik két csúcsát összekötő egyenesre, vagyis az AA_1 súlyvonal egyenesére. Jelöljük ezt A'-vel (5. ábra), hasonlóan a $(b+b_1)$-et és $(c+c_1)$-et ábrázoló B' és C' pont az O pont tükörképe a háromszög B-ből, ill. C-ből induló súlyvonalára.



5. ábra

Nyilvánvaló azonban, hogy O, A', B', C' egy körön van, mert a három súlyvonal átmegy a háromszög S súlypontján. Ez a pont tehát mind a három tükrözésnél helyben marad, s így

$$SO = SA' = SB' = SC'.$$

Ekkor a (4) tört értéke valós, viszont

$$\frac{a + a_1 - (c + c_1)}{b + b_1 - (c + c_1)}$$

nem valós, mert A', B' és C' nincs egy egyenesen. Az utolsó tört azonban éppen az

$$\frac{a_2 - c_2}{b_2 - c_2}$$

tört, tehát ez sem valós, A_2, B_2, C_2 nincs egy egyenesen. Ebben az esetben A_2, B_2, C_2 és M-nek kell egy körön lennie, és ezt akartuk bizonyítani.