Csak pozitív egészek jönnek tekintetbe, mert negatívokra a

$$K = x^4 + 4^x$$

kifejezés nem is egész, 0-ra pedig 1. Pozitív páros számokra $K$ osztható 4-gyel, tehát összetett.

Ha $x$ pozitív páratlan szám, akkor $2y+1$ alakban írva

$$4^x = 4 \cdot 4^{2y} = 4(2^y)^4.$$

Írjunk $2^y = 2^{\frac{x-1}{2}}$ helyébe $z$-t, akkor kifejezésünk így alakítható:

$$K = x^4 + 4z^4 = x^4 + 4z^4 + 4x^2 \cdot z^2 - 4x^2z^2 = \left(x^2 + 2z^2\right)^2 - (2xz)^2 =$$
$$= (x^2 + 2z^2 + 2xz)(x^2 + 2z^2 - 2xz) = \left((x+z)^2 + z^2\right)\left((x-z)^2 + z^2\right).$$

Itt az első tényező mindig nagyobb, mint 1, mert mindegyik tagja legalább 1. A második tényező pedig csak akkor lehet 1, ha $x = z = 1$. Mivel

$$x = 2y + 1 \qquad z = 2^y,$$

így ez abban az egy esetben következik be, ha $x = 1$, $y = 0$. Ekkor

$$x^4 + 4^x = 5,$$

$p$ azonban 5-nél nagyobb. Így a feladatban szereplő egyenletnek valóban nincs egész megoldása.

*Megjegyzések.* 1. A bizonyítás a feladat állításánál lényegesen többet adott, könnyen kiolvasható belőle a következő:

Ha $x$ és $z$ tetszés szerinti egész szám, akkor

$$N = x^4 + 4z^4$$

csak akkor nem összetett, ha

$$|x| = 1 \qquad \text{és} \qquad z = 0 \qquad \text{vagy} \qquad |z| = 1.$$

Valóban, mivel $x$ is, $z$ is páros kitevőn szerepel, a negatív értékeket abszolút értékükkel helyettesíthetjük. Ha $x = 0$, akkor $N = 4z^4$ összetett ($z = 0$-ra $N = 0$). Ha pedig $z = 0$, akkor $|x| = 1$-re $N = 1$, $|x| > 1$-re összetett.

2. Az itt használt azonosságon alapult az 1969. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 1. feladatának[1] megoldása. Erre több versenyző is utalt.

3. Sokan észrevették, hogy ha $x$ páratlan és nem osztható 5-tel, akkor $x^4$ (tíz alapú számrendszerben felírva) 1-re végződik, $4^x$ pedig 4-re, tehát $x^4 + 4^x$ osztható 5-tel és ha $x > 1$, akkor nagyobb 5-nél. Nem tudtak azonban mit kezdeni azzal az esettel, ha $x$ az 5 páratlan többszöröse.

[1] Lásd pl. *Bakos T. – Lőrincz P. – Tusnády G.:* Középiskolai Matematikai Versenyek, 1969. 109–110. old.