I. megoldás. Legyen a kérdéses polinom

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

A feladat másodfokú polinomról szól, tehát $a\neq 0$. Ha a polinom csak pozitív értékeket vesz fel, akkor

$$f(0)=c>0.$$

Megmutatjuk, hogy a is pozitív. Írjuk f-et

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a^2} \tag{1}$$

alakban. Itt az utolsó két tag állandó. Az első tag második tényezője tetszés szerint naggyá tehető x alkalmas megválasztásával. Így ha a negatív volna, akkor a polinom venne fel negatív értéket is.

Feltehetjük, hogy $a=1$, mert f és $\frac{1}{a}f$ mindegyike a másikból egy pozitív számmal való szorzással kapható. Ez a művelet pozitív együtthatós polinomok hányadosát újra ilyenbe viszi át, ha pl. a hányados számlálóját szorozzuk a számmal.

Ha b pozitív, akkor az 1 konstans polinom nevezővel kapunk egy kívánt alakú előállítást. Ellenkező esetben célszerű az (1) előállításban szereplő $\frac{b}{2}$-t jelölni $(-d)$-vel és a konstanst is egy betűvel, mondjuk h-val. Ekkor (1) így alakul:

$$f(x)=(x-d)^2+h. \tag{1'}$$

Itt $d\geq 0$ és $f(d)=h>0$.

A feladat állításának igazolásához elég egy olyan pozitív együtthatós polinomot találni, amelyikkel f-et megszorozva a szorzat is pozitív együtthatós lesz.

Ha $d=0$, akkor pl. $x+1$ nyilvánvalóan megfelel a követelményeknek.

Ha $d>0$, akkor próbálkozzunk az

$$\left(x^n+dx^{n-1}+\ldots+d^{n-1}x+d^n\right)^2 \tag{2}$$

polinommal. Ha $(1')$ első tagját szorozzuk, akkor

$$\left(x^{n+1}-d^{n+1}\right)^2=x^{2n+2}-2d^{n+1}x^{n+1}+d^{2n+2}$$

adódik. Ehhez kell még (2)-nek a h-szorosát adnunk. Ebben a polinomban x minden hatványa fellép a 0-adfokútól a $2n$-edfokúig pozitív együtthatóval.

Azt kell megnéznünk, tudjuk-e n-et úgy választani, hogy a kapott polinomban az $(n+1)$-edfokú tag együtthatója nagyobb legyen, mint $2d^{n+1}$.

Ha (2)-t két egyenlő tényező szorzataként képzeljük el, akkor az első k-adfokú tagját a második $(n+1-k)$-adfokú tagjával szorozva kapunk $(n+1)$-edfokú tagot. Ez lehetséges, ha $k=1,2,\ldots,n$. Mindegyik esetben $d^{n-1}x^{n+1}$ lesz a szorzat, így $(1')$ és (2) szorzatában x^{n+1} együtthatója

$$nhd^{n-1}-2d^{n+1}=d^{n-1}(nh-2d^2).$$

Ez az együttható pozitív, ha

$$n>\frac{2d^2}{h}.$$

Ha így választjuk meg n-et, akkor tehát a szorzat pozitív együtthatós lesz, csak a $(2n+1)$-edfokú tag hiányzik belőle – 0 lesz az együtthatója. Ha még megszorozzuk a szorzatot pl. $(x+1)$-gyel, akkor már olyan polinomot kapunk, amelyikben a 0-adfokú tagtól a $(2n+3)$-adfokú tagig mindegyik szerepel pozitív együtthatóval. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Ha másodfokú polinomon legfeljebb másodfokút értünk, akkor sem lehet, hogy másodfokú tag nem lép fel ténylegesen, de elsőfokú igen, mert minden ilyen polinom vesz fel pozitív és negatív értéket is. Egy c pozitív konstans polinom viszont írható $\frac{c}{1}$ alakban mint két pozitív együtthatós polinom hányadosa.

2. Volt, aki megelégedett azzal, hogy a ténylegesen fellépő tagok együtthatója pozitív legyen, de megengedte, hogy egyes hatványok kimaradjanak, mint $(1')$ és (2) szorzatából a $(2n+1)$-edfokú tag. Ha ilyen alakig sikerült eljutni, akkor már nem nehéz a feladat szigorúbb követelményeit is kielégítő polinomhoz jutni. Könnyen látható, hogy ha egy nem-negatív együtthatós polinomot, amelyben két-két előforduló tag közt legfeljebb k darab hatvány hiányzik, megszorzunk pl. az

$$1+x+x^2+\ldots+x^k$$

polinommal, akkor már nem lesz kimaradó hatvány a legmagasabb fokú tagig.

3. Nem csak x^2 együtthatóját választhatjuk 1-nek, x együtthatójának abszolút értékét is megváltoztathatjuk. Ha ugyanis x helyébe ry-t írunk egy pozitív r számmal, akkor

$$f(ry)=r^2\left(y^2-\frac{b}{r}y+\frac{c}{r^2}\right).$$

Ha itt a második tényező előállítható pozitív együtthatós P_1 és P_2 polinomokkal $P_1(y)/P_2(y)$ alakban, akkor

$$f(x)=\frac{r^2P_1\left(\dfrac{x}{r}\right)}{P_2\left(\dfrac{x}{r}\right)}$$

f-nek egy előállítása pozitív együtthatós polinomok hányadosaként. Így írhatjuk f-et pl. x^2-x+u vagy $x^2-2x+v=(x-1)^2+w$, $(w=v-1)$ alakban.

4. Láttuk, hogy a másodfokú polinom együtthatóitól függött, hogy hányadfokú számlálóval és nevezővel sikerül azt pozitív együtthatós polinomok hányadosaként írni. A fenti eljárásban a szorzó polinom N fokszáma (az előállítás nevezőjéé)

$$N=2n+1>\frac{4d^2}{h}+1.$$

Az $x^2-2x+1{,}1=(x-1)^2+0{,}1$ polinom esetén pl. ez legalább 42-edfokú szorzót jelent. Az

$$\begin{gathered}(x^2-2x+1{,}1)(x^9+2{,}01x^8+2{,}93x^7+3{,}65x^6+4{,}08x^5+4{,}15x^4+3{,}813x^3+3{,}062x^2+\\+1{,}93x+0{,}492)=x^{11}+0{,}01x^{10}+0{,}01x^9+0{,}001x^8+0{,}003x^7+0{,}005x^6+\\+0{,}001x^5+0{,}001x^4+0{,}0003x^3+0{,}0002x^2+1{,}139x+0{,}5412,\\(x^2-2x+1{,}1)(1+1{,}82x+2{,}41x^2+2{,}73x^3+2{,}78x^4+2{,}573x^5+2{,}151x^6+1{,}572x^7+\\+0{,}903x^8+2{,}13x^9=1{,}1+0{,}002x+0{,}011x^2+0{,}003x^3+0{,}008x^4+0{,}0003x^5+\\+0{,}0001x^6+0{,}0002x^7+0{,}0003x^8+0{,}0003x^9+0{,}477x^{10}+0{,}213x^{11},\end{gathered}$$

azonosságok azt mutatják, hogy már 9-edfokú polinomok is megfelelnek (két egészen különböző felépítésű is). Az sincs kizárva, hogy még alacsonyabb fokúval is célt lehetne érni.

II. megoldás. A harmadik megjegyzés szerint írhatjuk a másodfokú polinomot x^2-2x+v alakban. Ez csak pozitív értékeket vesz fel, ha $v>1$.

A második megjegyzés értelmében elég olyan nem-negatív együtthatós polinomot keresni, amivel ezt a polinomot megszorozva a szorzat is nem-negatív együtthatós lesz. Ezt a polinomot

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

alakban keresve feltehetjük, hogy $a_0=1$. Az a_i-knek olyan nem-negatív számoknak kell lenniük, amelyekre

$$a_1v-2a_0\geq 0,\quad a_iv-2a_{i-1}+a_{i-2}\geq 0,\quad \text{ha}\quad i=2,\ldots,n,\quad \text{és}\quad -2a_n+a_{n-1}\geq 0.$$

Keressünk olyan a_i-ket, amelyekre az első n feltételben egyenlőség áll fenn és próbáljuk n-et úgy választani, hogy az utolsó feltétel is teljesüljön. Legyen tehát

$$a_1=\frac{2a_0}{v}=\frac{2}{v},\qquad a_i=\frac{2a_{i-1}-a_{i-2}}{v}\qquad i=2,\ldots,n. \tag{3}$$

Kérdés, megválasztható-e n úgy, hogy az utolsó egyenlőtlenség is teljesüljön. Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy ha a fenti szabályosság szerint még az $(n+1)$-edik elemet is képezzük a sorozatban, az már nem lesz pozitív.

A $b_i=\dfrac{a_i}{a_{i-1}}$ hányadosokra (3) a következő összefüggéseket adja:

$$b_1=\frac{a_1}{a_0}=a_1=\frac{2}{v},\qquad b_i=\frac{2-\dfrac{1}{b_{i-1}}}{v}\qquad i=2,\ldots,n.$$

Olyan n-re van szükségünk, amelyre

$$\frac{1}{b_n}\geq 2,\qquad \text{azaz}\qquad b_n\leq\frac{1}{2}.$$

Ismeretes és könnyen belátható, hogy minden pozitív u-ra

$$u+\frac{1}{u}\geq 2 \qquad \text{azaz} \qquad 2-\frac{1}{u}\leq u.$$

Ezt felhasználva

$$b_i=\frac{2-\dfrac{1}{b_{i-1}}}{v}\leq\frac{b_{i-1}}{v}.$$

Ezt az egyenlőséget $(i-1)$-szer alkalmazva azt nyerjük, hogy

$$b_i\leq\frac{b_1}{v^{i-1}}=\frac{2}{v^i}.$$

Mivel $v>1$, így van egyenlőtlenségünk szerint olyan n, amelyikre $b_n\leq\frac{1}{2}$, és már láttuk, hogy elég a legkisebb ilyen n értéket megkeresnünk. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Lényegében a fenti gondolatmenet szerint készült az I. megoldás utáni 4. megjegyzés első példája, azzal a módosítással, hogy a szorzat együtthatóit nem tettük 0-vá, csak v-hez képest nagyon kicsivé, hogy utólag ne kelljen még egy magas fokú polinommal szorozni ahhoz, hogy szigorúan a feladat feltételeinek megfelelő polinomokhoz jussunk.

Eljárhatnánk úgy is, hogy a_n-t választjuk 1-nek, és ezután a végétől visszafelé haladva határozzuk meg az együtthatókat pl. úgy, hogy mindenütt egyenlőség teljesüljön. Eközben n értékét határozatlanul hagyjuk, addig haladunk, amíg az utolsó két nyert értékre már az első egyenlőtlenség is teljesül. Ezen az alapon készült az említett megjegyzés második példája.

III. megoldás (vázlat). Ismét azt mutatjuk meg, hogy találhatunk másodfokú polinomunkhoz olyan nem-negatív együtthatós polinom szorzót, amivel szorozva a szorzat is nem-negatív együtthatós lesz.

A másodfokú polinomot írhatjuk

$$x^2-bx+c \tag{4}$$

alakban, ahol b és c pozitív. Akkor lesz a polinom minden értéke pozitív, ha

$$b^2<4c. \tag{5}$$

Szorozzuk meg (4)-et az x^2+bx+c polinommal. A szorzat

$$x^4-(b^2-2c)x^2+c^2.$$

Ha $b^2\leq 2c$, akkor ezzel célt is értünk. Ha $2c<b^2(<4c)$, akkor szorozzunk még $x^4+(b^2-2c)x^2+c^2$-tel; a szorzat

$$x^8-\left((b^2-2c)^2-2c^2\right)x^4+c^4.$$

Itt x^4 szorzója

$$\left(b^2-\left(2+\sqrt{2}\right)c\right)\left(b^2-\left(2-\sqrt{2}\right)c\right),$$

tehát elértük célunkat, ha $b^2\leq\left(2+\sqrt{2}\right)c$, mert a második tényező feltételei szerint pozitív. Ha nem, akkor folytatni kell az eljárást. Kérdés, hogy eljutunk-e így véges számú lépésben nem-negatív együtthatós szorzathoz.

Az n-edik lépés után ilyen alakú szorzatot kapunk:

$$x^{2^{n+1}}-b_nx^{2^n}+c^{2^n}.$$

A b_n-ek sorozata a

$$b_{n+1}=b_n^2-2c^{2^n} \tag{6}$$

képzési szabály szerint keletkezik a $b_0=b$ kezdő értékből kiindulva.

Azt szeretnénk belátni, hogy tetszés szerinti (5)-öt kielégítő pozitív b, c értékekből kiindulva b_n elég nagy n-re negatív lesz. Ehhez b_n-et szorzat alakban írjuk. Ezt b_4 esetében így tehetjük:

$$b_4=\left(\left((b^2-2c)^2-2c^2\right)^2-2c^4\right)^2-2c^8=\left(\left((b^2-2c)^2-2c^2\right)^2-2c^4-\sqrt{2}c^4\right)\left(b_3+\sqrt{2}c^4\right)=$$

$$=\left((b^2-2c)^2-2c^2-\sqrt{2+\sqrt{2}}c^2\right)\left(b_2+\sqrt{2+\sqrt{2}}c^2\right)\left(b_3+\sqrt{2}c^4\right)=$$

$$\left(b^2-\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)c\right)\left(b_1-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}c\right)\left(b_2+\sqrt{2+\sqrt{2}}c^2\right)\left(b_3+\sqrt{2}c^4\right).$$

Itt egy újabb sorozat lépett fel. Ennek a képzési szabályát kicsit általánosabban, mint ahogy számításainkban szerepel, így adhatjuk meg: legyen tetszés szerinti pozitív z kiindulási értékkel

$$a_1(z) = z \qquad \text{és} \qquad a_{n+1}(z) = 2 + \sqrt{a_n(z)}, \qquad \text{ha} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Ekkor a fenti szorzatban az

$$a_n = a_n(2)$$

sorozat néhány tagja szerepel.

Könnyű látni, hogy adott z értékre az $a_n(z)$ értékek n növekedtével növekednek, és hogy adott n-re z növekedtével $a_n(z)$ is növekszik. Teljes indukcióval belátható, hogy minden n-re $a_n(4) = 4$, így

$$a_n = a_n(2) < a_n(4) = 4,$$

minden n-re.

A b_4-re talált fenti előállításhoz hasonlóan minden b_n szorzattá alakítható. Az első tényező $b^2 - a_n c$ lesz, és ezt kell szorozni $b_k + \sqrt{a_{n-k}} c^{2^{k-1}}$ alakú tényezőkkel a $k = 1, 2, \ldots, n-1$ értékekre. Ezt röviden így jelöljük:

$$b_n = (b^2 - a_n c) \prod_{k=1}^{n-1} \left(b_k + \sqrt{a_{n-k}} c^{2^{k-1}} \right)$$

Ezt ismét teljes indukcióval lehet belátni.

Az (5) feltétel szerint b^2/c egy 4-nél kisebb érték. Azt kell belátnunk, hogy a_n vesz fel alkalmas n-re ennél nagyobb értéket. Ha ez igaz, akkor a legkisebb ilyen n-et n_0-val jelölve az n_0-nál kisebb indexű b-k pozitívok, viszont b_{n_0} negatív, s így n_0-szor ismételve szorzási eljárásunkat, nem-negatív együtthatós polinomhoz jutunk.

Tudjuk, hogy a_n is kisebb 4-nél minden n-re. Megmutatjuk azonban, hegy elég nagy n-re tetszés szerint közel jut 4-hez. Valóban, ha $n > 1$, akkor

$$0 < 4 - a_n = 2 - \sqrt{a_{n-1}} = \frac{4 - a_{n-1}}{2 + \sqrt{a_{n-1}}} = \frac{4 - a_{n-1}}{a_n} < \frac{4 - a_{n-1}}{2}.$$

Alkalmazva ezt az egyenlőtlenséget újra és újra, egyre csökkenő indexekkel végül azt kapjuk, hogy

$$4 - a_n < \frac{4 - a_1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}},$$

ez pedig tetszés szerint kicsi, ha n elég nagy. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Ha itt az n-edik lépés után állunk meg, akkor a szorzatban a hiányzó egymás utáni hatványok száma $2^n - 1$ lesz, így a szorzó polinom fokszáma, ha pontosan a feladatban kitűzött célt akarjuk elérni,

$$2 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^n - 1 = 3(2^n - 1)$$

lesz. A megoldás gondolatmenete szerint biztosan célt érünk, ha n-et úgy választjuk, hogy

$$\frac{1}{2^{n-2}} < 4 - \frac{b^2}{c}$$

teljesüljön. Ez az I. megoldás utolsó megjegyzésének példája esetében 33-adfokú szorzó polinomot jelent az I. meggondolás gondolatmenetéből adódó 42-edfokúval (másfelől a megjegyzésben adott 9-edfokúval) szemben.

A feltételeket az I. megoldásban szereplő d és h együtthatókra átírva általában is az ottani korlát 3/4-e adódik ezen az úton. Ennél azonban lényegesen jobb becslés is kiolvasható n-re a követett gondolatmenetből.

Ismételten alkalmazva a talált összefüggést, azt nyerjük, hogy

$$4 - a_n = \frac{4 - a_{n-1}}{a_n} = \frac{4 - a_1}{a_n a_{n-1} \ldots a_2} = \frac{2}{a_n a_{n-1} \ldots a_2}.$$

Ha itt a nevező tényezőit nem 2-vel, hanem a legkisebbikkel, $a_2 = 2 + \sqrt{2} > 3{,}41$-dal behelyettesítjük, máris a

$$\frac{2}{3{,}41^{n-1}} < 4 - \frac{b^2}{c}, \qquad 3{,}41^{n-1} > \frac{2c}{4c - b^2}$$

egyenlőtlenséget kapjuk n meghatározására.

Az említett másodfokú polinom esetében legegyszerűbb ténylegesen elvégezni a beszorzásokat, és azt találjuk, hogy ezen az úton 21-edfokú polinommal érünk célhoz.