Megoldás. Feltesszük, hogy a különféle lottószelvények különféleképpen vannak kitöltve. Vegyünk egy tetszőleges L_1 lottószelvényt. A többi 5^5-1 db lottószelvény mindegyike tartalmazza az L_1-en levő 5 szám valamelyikét. Az L_1-en levő 5 szám közül tehát legalább az egyiket a többi szelvények közül legalább 5^4 tartalmazza. Válasszunk ki egy ilyen számot, jelöljük ezt a-val. a-t tehát (L_1-et is beleszámítva) több, mint 5^4 szelvény tartalmazza. Ha minden szelvény tartalmazza a-t, akkor az állítás helyes. Ha nem, legyen L_2 egy olyan szelvény, amely nem tartalmazza a-t. Az a-t tartalmazó, több mint 5^4 szelvény mindegyike tartalmaz legalább egy L_2-n levő számot. Tehát az L_2-n levő 5 szám közül legalább az egyiket (mondjuk b-t) az a-t tartalmazó szelvények közül több, mint 5^3 kell, hogy tartalmazza. Ha minden szelvény tartalmazza a és b közül legalább az egyiket, készen vagyunk. Ha nem, legyen L_3 egy sem a-t, sem b-t nem tartalmazó szelvény. A fenti gondolatmenetet megismételve találunk L_3-on egy olyan c számot, hogy több mint 5^2 szelvény van, amelyik a, b, c mindegyikét tartalmazza. Ismét készen vagyunk, vagy van olyan L_4 szelvény, ami a, b, c egyikét sem tartalmazza, és ekkor ezen találunk olyan d számot, hogy több, mint 5 szelvény tartalmazza a, b, c, d mindegyikét. Ha lenne olyan L_5 szelvény, amelyik a, b, c, d egyikét sem tartalmazná, akkor az L_5-ön levő öt szám egyike, mondjuk e, olyan lenne, hogy több, mint 1 szelvény lenne, amelyik a, b, c, d, e mindegyikét tartalmazná. Mivel ez feltevésünk szerint lehetetlen, bebizonyítottuk, hogy az a, b, c, d számnégyes rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

Megjegyzések. 1. Arra a feltevésre, hogy különböző szelvények különbözőképpen vannak kitöltve, valóban szükség van. Könnyen konstruálhatunk olyan példát, ami ezt mutatja. Válasszunk ki pl. az első 9 természetes szám közül minden lehetséges módon 5-öt. Ez $\binom{9}{5}=126$-féleképpen lehetséges.Ezután az 5^5 szelvény mindegyikén ezen ötösök valamelyikét jelöljük ki, mégpedig a 126 db ötös mindegyike legalább egy szelvényen legyen kijelölve. Könnyen látható, hogy ekkor bármely két szelvény tartalmaz közös számot, mégsem találhatunk a mondott tulajdonsággal rendelkező számnégyest.

2. Ha veszünk 5^5 db különbözőképpen kitöltött lottószelvényt, úgy hogy bármely kettőnek van közös eleme, akkor világos, hogy van 5 olyan szám, hogy minden lottószelvény tartalmazza ezen 5 szám közül legalább az egyiket. Pl. akármelyik lottószelvényen megjelölt 5 szám megfelel. Nehezebb (és éppen ez volt a feladat állítása), azt bizonyítani, hogy már 4 szám is található a kívánt módon.

Nem javítható-e a 4 tovább 3-ra, azaz nem igaz-e, hogy mindig van 3 olyan szám, hogy mindegyik lottószelvény tartalmazza e 3 szám valamelyikét? Megmutatjuk, hogy nem.

Rendezzük el az 1-től 10-ig terjedő számokat az alábbi séma szerint:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & 4 & & 5 & & 6 & \\ 7 & & 8 & & 9 & & 10 \end{array}$$

Válasszuk ki ezek után az összes olyan számnégyest, amit úgy kapunk hogy valamelyik szintről az összes számot vesszük, minden alatta levő szintről 1–1 számot veszünk, a fölötte levő szintekről pedig nem veszünk számokat.

Ilyen négyesek pl.:

$$\begin{array}{cccr} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

Összesen

$$\frac{4!}{1!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{4!}=4\cdot3\cdot2+4\cdot3+4+1=41$$

ilyen számnégyes van. Könnyen látszik, hogy bármely kettőnek van közös eleme, és nem található 3 olyan szám, hogy mind a 41 számnégyes tartalmazná ezen 3 szám valamelyikét.

Vegyük ezután hozzá mindegyik négyeshez a 11-től 90-ig terjedő számok mindegyikét. Így

$$41\cdot 80=3280$$

számötöst kapunk úgy, hogy bármely kettőnek van közös eleme és nincs 3 olyan szám, hogy mindegyik számötös tartalmazná e 3 szám valamelyikét. E számötösök száma még több is, mint a kívánt $3125=5^5$. Ha azt akarjuk, hogy számuk pontosan 3125 legyen, hagyjunk el 155 db-ot közülük, csak arra vigyázva, hogy az elhagyás után is még mind a 41 számnégyest legalább egy megmaradt számötös tartalmazza. Nem nehéz belátni, hogy ez a konstrukció rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

3. Mint látható, a feladat bizonyításában nem használtuk ki, hogy éppen 90 szám közül választhatók az ötösök. Valójában azt bizonyítottuk, hogy akárhogy választunk (bármely elemekből képzett) 5^5 db 5-elemű halmazt úgy, hogy bármely két halmaznak van közös eleme, akkor mindig található 4 olyan elem, hogy mind az 5^5 db halmaz mindegyike tartalmazza e 4 elem közül legalább az egyiket.

Általánosabban a következő igaz: ha van n^n db n elemű halmaz ($n \geq 2$) úgy, hogy bármely kettőnek van közös eleme, akkor található $(n-1)$ db elem úgy, hogy bármely halmaz tartalmazza ezen $(n-1)$ elem közül legalább az egyiket. Ennek bizonyítása teljesen megegyezik a fent közölt bizonyítással, csak éppen az ott szereplő gondolatmenetet nem 5, hanem n lépésen keresztül kell megismételni.

4. Az eddig tárgyalt problémakör matematikai tartalma még általánosabban a következő: Ha vannak n elemű halmazok úgy, hogy bármely kettőnek van közös eleme, továbbá tudjuk, hogy nem található n-nél kevesebb elem úgy, hogy mindegyik halmaz tartalmazza ezen elemek valamelyikét, akkor ezek az n elemű halmazok nem lehetnek sem túl sokan, sem túl kevesen.

Mennyi itt a „túl sok"? A 3. megjegyzésben láttuk, hogy n^n-t már biztosan nem érheti el a számuk. Másrészt a 2. megjegyzésben leírt konstrukciót n szintből álló számháromszögre általánosítva látjuk, hogy

$$\frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + \frac{n!}{n!} = \left[(e-1) \cdot n!\right]$$

n elemű halmaz még található a fent leírt módon.

(Itt $e = 2{,}71828\ldots$ és $[x]$ jelöli a legnagyobb olyan egész számot, amelyik nem nagyobb x-nél.)

Nagy n-re $\left[(e-1) \cdot n!\right]$ sokkal kisebb, mint n^n. Hogy $\left[(e-1) \cdot n!\right]$ és n^n között hol kezdődik a „túl sok", nem tudjuk.

Mennyi a „túl kevés"? Nem nehéz belátni, hogy $2(n-1)$ már túl kevés. Ha ugyanis legfeljebb ennyi halmazunk van, akkor kettenként választhatunk hozzájuk egy-egy elemet, ami annak a kettőnek mindegyikében benne van, (hiszen bármely két halmaznak van közös eleme) és így legfeljebb $(n-1)$ elemre lesz szükségünk.

Véges projektív síkok[1] segítségével tudunk olyan halmazszámot is megadni, amennyi már nem „túl kevés". Vegyünk egy olyan véges projektív síkot, amelyen minden egyenesnek n pontja van. Ilyen mindig található, ha $n-1$ prímhatvány. Az egyenesek lesznek a szóban forgó n-elemű halmazok, számuk n^2-n+1. Bármely kettő metszi egymást, és nem nehéz belátni, hogy nem adható meg úgy $(n-1)$ pont, hogy minden egyenes tartalmazza legalább az egyiket közülük. Finomabb módszerek alkalmazásával Erdős Pál és Lovász László kimutatta, hogy a „túl kevés" valahol $\frac{8}{3}n-3$ és $c \cdot n^{3/2} \cdot \log\, n$ között ér véget, ahol c alkalmas konstans. Hogy pontosabban hol van ez a határ, az ez idő szerint szintén nem ismeretes.

[1] A véges projektív sík definíciója és elemi tulajdonságai megtalálhatók pl. a K.M.L. 51/2 (1975. október) számában az 53. oldalon kezdődő cikkben, vagy az alábbi szakköri füzetben:
Lovász–Pelikán–Vesztergombi: Kombinatorika. 2. kiadás (Tankönyvkiadó, Budapest, 1972. 128. old.)