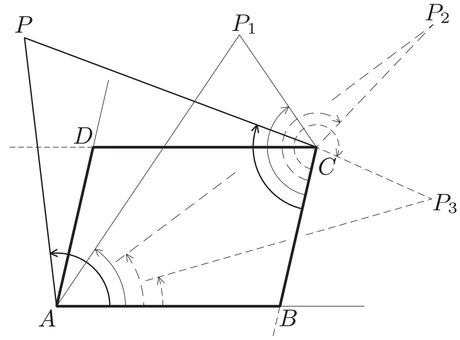
I. megoldás. Állapítsuk meg először, hol helyezkedik el a P pont. Megmutatjuk, hogy nem lehet az AB, AD félegyenesek meghatározta, C-t tartalmazó szögtartományban. Valóban, az itt fekvő P pontokra[1] a $PAB\sphericalangle$ része a $DAB\sphericalangle$-nek, a $PCB\sphericalangle$ viszont tartalmazza a $DAB\sphericalangle$-gel egyenlő $DCB\sphericalangle$-et.

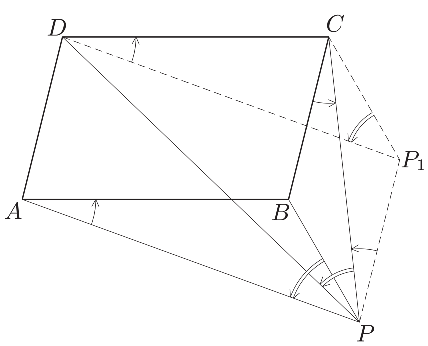


1. ábra

Hasonlóan nem lehet P az A-t tartalmazó DCB szögtartományban sem, tehát vagy az AB és CB egyenesek B-n túli meghosszabításai közti kenvex szögtartományban van, vagy AD-nek és CD-nek a D-n túli meghosszabításai közt.

Feltehetjük, hogy az előbbiben, mert ellenkező esetben az ellentétesen irányított BAP és BCP szögekkel együtt a paralelogramma A-nál, ill. C-nél levő szögével csökkentett DAP és DCP szögek nagysága is egyenlő és irányításuk ellentétes. Így tükrözve a paralelogramma középpontjára, visszavezettük a problémát arra az esetre, amikor P az AB és CB meghosszabbítása határolta tartományban van.

Toljuk el a P pontot a BC vektorral. Új helyzete legyen P_1 (2. ábra). Ekkor a DCP_1 háromszög az ABP háromszög eltolt képe, BPP_1C pedig paralelogramma. A $P_1DC\sphericalangle$ és a $PAB\sphericalangle$ irányítás és nagyság szerint megegyezik. Utóbbi a feladat feltétele szerint a $BCP\sphericalangle$-gel egyezik meg nagyságban és irányításra is, ez pedig a $P_1PC\sphericalangle$-gel, mert a BPP_1C paralelogramma középpontjára való tükrözés egymásba viszi át a kettőt.

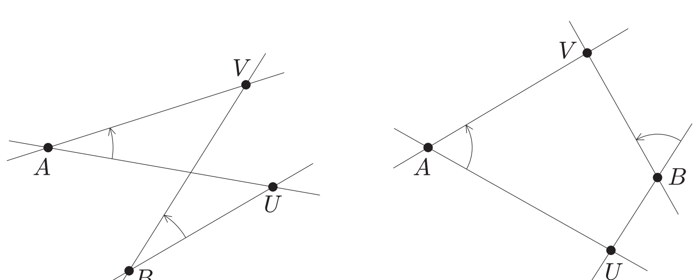


2. ábra

Azt nyertük tehát, hogy a P-t és a D-t P_1-gyel összekötő egyenest egyező irányban egyenlő szöggel elfordítva kapjuk a C-n átmenő egyeneseket. Ez azonban azt is jelenti, hogy C, D, P és P_1 egy körön van. Ekkor a P-t és P_1-et C-vel összekötő egyeneseket is egyező irányú és nagyságú forgás viszi át a P-t ill. P_1-et, D-vel összekötő egyenesekbe. A P_1C, P_1D egyeneseket viszont CB vektorral eltolva a PB, PD egyeneseket kapjuk. Az előbbit az utóbbiba tehát ugyanolyan irányú és nagyságú forgás viszi át, mint PC-t PD-be. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A kerületi szögek tételét nem egészen megszokott formában fogalmaztuk meg. Ezt azért tettük, mert ebben a formában szükséges és elégséges feltételét kapjuk annak, hogy négy pont egy körön feküdjék, anélkül, hogy vizsgálni kellene a pontok egymáshoz viszonyított elhelyezkedését a síkban.

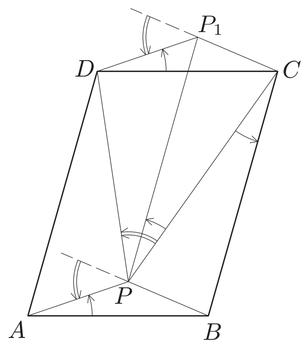
Az A, B, U, V pontok akkor és csak akkor vannak egy körön, ha az AU és BU egyenest ugyanolyan nagyságú és irányú elforgatás viszi át az AV, ill. BV egyenesbe (3. ábra).



[1] Az ábrán a szögek iránya ellentétes

3. ábra

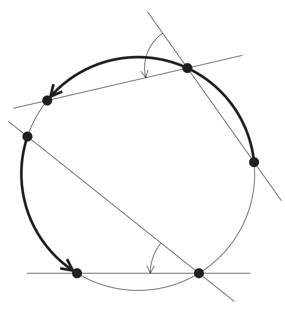
A tétel ilyen megfogalmazását használva elhagyhatjuk azt a feltevést is, hogy a P pont a paralelogrammán kívül van. Minden esetben igaz, hogy ha a feladat további feltételei teljesülnek, akkor a P-t B-vel, ill. C-vel összekötő egyenes egyező nagyságú szöggel forgatható egyező irányban az A-val, ill. D-vel összekötő egyenesbe. A fenti bizonyítás változtatás nélkül érvényes marad, amint az a 4. ábrán könnyen követhető.



4. ábra

2. Az előző megjegyzésben megfogalmazott tételt, illetőleg annak megfelelő összefüggéseket általában a középponti és kerületi szögek közti összefüggésből szokás levezetni, a tétel azonban könnyen belátható közvetlenül is.

Először kissé módosítjuk a kerületi szög és a belefoglalt körív fogalmát. Kerületi szögnek nevezzük két egyenes szögét, ha az egyenesek a kör kerületén metszik egymást. Tekintsük az egyenesek másik metszéspontját a körrel. A két egyenes szöge által befoglalt köríven a körnek a metszéspontok közti két íve közül azt értjük, amelyiket a két egyenes adott nyílásszögű szögtartománya tartalmaz. Ha az egyenesek irányított szögét tekintjük, akkor a befoglalt ívet is irányíthatjuk az első szögszárral való metszésponttól a második szögszárral való metszéspont felé. Nem zárjuk ki azt sem, hogy az egyik szögszár érintő legyen; ez esetben az ezzel a szárral való „második metszéspont" is jelentse az érintés pontot (5. ábra).



5. ábra

A kerületi szög ilyen értelmezésével megengedtünk olyan eseteket is, amelyeknél a szög csúcsa a befoglalt köríven van és nem csak a 180°-ra kiegészítő szöget tekintjük mint a teljes körré kiegészítő íven nyugvó kerületi szöget.[2]

A következő tételt bizonyítjuk be:

Adott kör két (irányított) kerületi szöge akkor és csak akkor foglal be nagyságra és irányra egyenlő íveket, ha egyenlők.

A tételből nyilvánvalóan következik az előző megjegyzésben kimondott tétel. Ha ugyanis A, B, U, V egy körön fekszik, akkor az AU, AV egyenesek szöge is, a BU, BV egyeneseké is ugyanazt az UV ívet foglalja magába, tehát egyenlők.

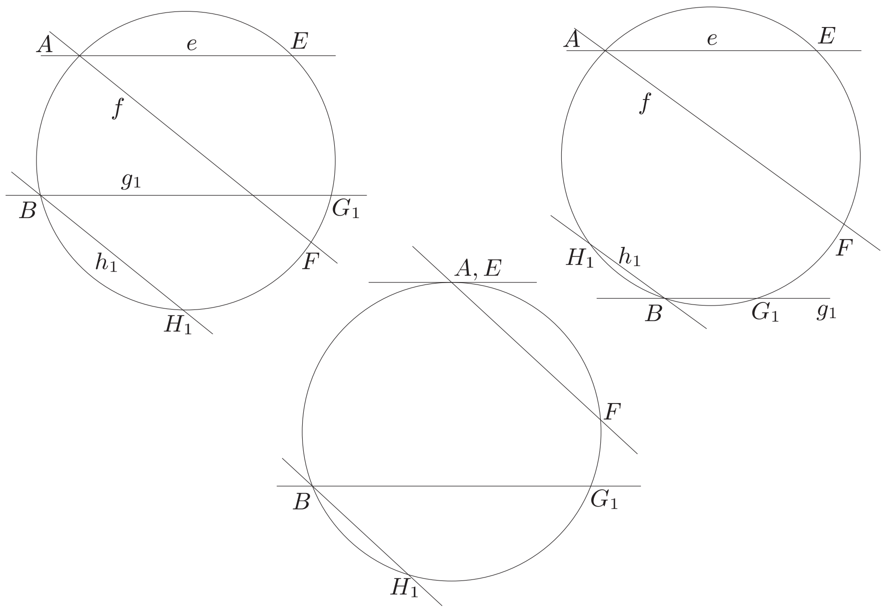
Ha viszont AU és AV nagyságra és irányra ugyanakkora szöget határoz meg, mint BU és BV, akkor először is nem lehet A, B és U egy egyenesen, mert akkor AU-val, ill. BU-val egyenlő szöget bezáró egyenesek párhuzamosak lennének, nem lehetne egy közös V metszéspontjuk, kivéve, ha egybeesnek ekkor sincs azonban egy meghatározott V metszéspont.

Létezik tehát egy egyértelműen meghatározott, A-n B-n, és U-n átmenő kör. Messe ez AV-t V'-ben. Ekkor BU és BV' szöge megegyezik AU és AV szögével, tehát feltétel szerint BU és BV szögével is, BV tehát egybeesik BV'-vel és így AV-vel való V metszéspontja is V'-vel. Ez azonban éppen azt jelenti, hogy A, B, U, V egy körön van, és ezt akartuk belátni.

Bizonyítsuk be ezután a fönt kimondott tételt, legyen a körben két kerületi szög. Az egyiket alkossák az e és f egyenesek, a másikat a g és h egyenesek. Forgassuk el az utóbbit úgy, hegy az elforgatott g_1 és h_1 egyenes közül g_1

[2] Ezért látszott célszerűbbnek befoglalt ívről beszélni, mint arról az ívről, amin a szög nyugszik.

legyen párhuzamos e-vel. Jelöljük a szögek csúcsát A-val, ill. B-vel, e, f, g_1, h_1 másik metszéspontját a körrel E, F, G_1, H_1-gyel (6. ábra).



6. ábra

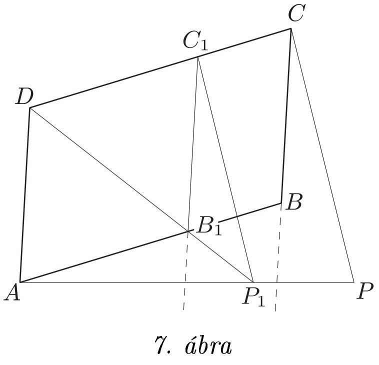
Két állítást kell belátnunk.

a) *A szögek egyenlőségéből következik az íveké:* ha e és f szöge megegyezik g_1 és h_1 szögével, akkor h_1 is párhuzamos f-fel. Az AE és BG_1 párhuzamos húrok felező merőlegese a körnek egyaránt átmérője és párhuzamosak, tehát egybeesnek. Az EG_1 ívnek erre az átmérőre vett tükörképe az AB ív, ezek tehát egyenlők és ellentétes irányúak. Hasonlóan az FH_1 ív is egyenlő AB-vel és ellentétes irányú, tehát EG_1 és FH_1 egyező irányú és nagyságú. Ekkor azonban EF és G_1H_1 is egyező irányú és nagyságú, mert az előbbi az EG_1 és G_1F ívek összege, az utóbbi pedig G_1F-ből az FH_1 ív hozzáadásával keletkezik.

b) *Az ívek egyenlőségéből következik a szögeké:* Ha az EF és G_1H_1 ívek irányra is, nagyságra is megegyeznek, akkor $EG_1 = EF + FG_1$ és $FH_1 = FG_1 + G_1H_1$ ívek is megegyeznek. Mivel $e \parallel g_1$ most is fennáll, így EG_1 és AB egyező nagyságú és ellentétes irányú ívek. Ekkor azonban ugyanez áll az AB és FH_1 ívekre is. Ha tehát tükrözünk az AF húrt merőlegesen felező átmérőre, akkor B tükörképe H_1 lesz. Eszerint a BH_1 egyenes, vagyis h_1 is merőleges a tükörtengelyre, tehát párhuzamos f-fel. Ekkor azonban g_1 és h_1 szöge megegyezik e és f szögével, és ezt kellett belátnunk.

II. megoldás. A P pont rombusz esetén a BD átló egyenesének a paralelogrammán kívüli részén van, mert a BD-re való tükrözés A-t C-be és így a BAP szöget a BCP szögbe viszi át.

Ha a paralelogramma nem rombusz, akkor mérjük az A-ból induló és B-n átmenő félegyenesre az $AB_1 = AD$ távolságot. A B_1-en át AD-vel párhuzamosan húzott egyenes messe a CD egyenest C_1-ben. Egy P_1 pont, amely az AB_1C_1D paralelogrammára vonatkozóan elégíti ki a feladat feltételeit, a DB_1 átló egyenesén van. Szimmetria folytán feltehetjük, hogy a B_1-en túli meghosszabbításon (7. ábra).

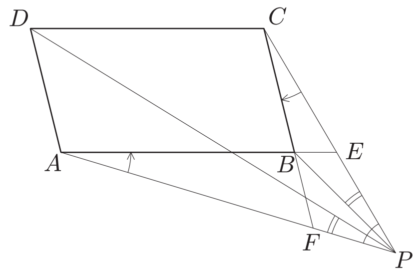


7. ábra

Toljuk el a $B_1C_1P_1$, szöget úgy, hogy B_1C_1 menjen át BC-be. Ekkor P_1 az AP_1 egyenes mentén mozdul el és jut a P pontba. Ez a BC egyenes ellenkező partján van mint A, másrészt az egész A-ból induló P_1-en átmenő félegyenes AB

ellenkező partján van, mint a paralelogramma. Így P az AB és CB egyenesek B-n túli meghosszabbításai határolta síkrészben van.

Messe AB és CB egyenese a CP, ill. AP egyenest E-ben, ill. F-ben. Megmutatjuk, hogy az $APCD$ és $EPFB$ négyszögek hasonlóak, a csúcsokat felsorolt sorrend szerint feleltetve meg egymásnak. (8. ábra)



8. ábra

Valóban P-nél levő szögük közös; másrészt $EBF\sphericalangle = ABC\sphericalangle$, mert egymás csúcsszögei, viszont $ABC\sphericalangle = ADC\sphericalangle$; végül $BEP\sphericalangle = DCP\sphericalangle = DAP\sphericalangle$. Az utóbbi egyenlőség épp a feladat feltétele folytán áll fenn.

Az ABF és CBE háromszög hasonló, mert A-nál és C-nél feltétel szerint egyenlő szög van, a B-nél levő szögek pedig csúcsszögek. Ebből következik, hogy
$$\frac{BE}{BF} = \frac{BC}{BA} = \frac{AD}{CD},$$
azaz a két négyszög egy-egy egymásnak megfelelő oldalpárjának az aránya is megegyezik. Ebből már következik a két négyszög hasonlósága és ebből az, hogy az átlók az egymásnak megfelelő oldalakkal egyenlő szöget zárnak be. Így $APD\sphericalangle = EPB\sphericalangle = CPB\sphericalangle$. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.