Megoldás. Könnyű látni, hogy a sorozat pozitív, sőt növekedő tagokból áll, hiszen $a_0 = 5$ pozitív, és ha egy a_n tag pozitív, a következő nagyobb nála a pozitív $1/a_n$ értékkel. A növekedés mértékére jó közelítést kapunk, ha a sorozat elemeinek négyzetét vizsgáljuk:

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2}.$$

Ha ezt $n = 0, 1, 2, \ldots, (k-1)$-re felírjuk és összeadjuk, akkor a bal oldalon a_1^2-től a_k^2-ig szerepelnek a tagok, a jobb oldalon pedig fellép a_0^2-tól a_{k-1}^2-ig a megfelelő összeg. Így az egyenlő tagokat a két oldalról elhagyva, azt kapjuk, hogy

$$a_k^2 = a_0^2 + 2k + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{a_n^2}. \tag{5}$$

Ez $k = 1000$-re azt adja, hogy

$$a_{1000}^2 = 2025 + \sum_{n=0}^{999} \frac{1}{a_n^2} = 45^2 + \sum_{n=0}^{999} \frac{1}{a_n^2} > 45^2. \tag{6}$$

Ezzel a kívánt alsó becslést meg is kaptuk.

A felső becsléshez, mivel $45{,}1^2 = 2034{,}01$, elég azt megmutatni, hogy a (6)-ban szereplő 1000-tagú összeg kisebb, mint 9,01. Mivel a sorozat elemei pozitívak és növekednek, így az egymás utáni tagok négyzetei reciprok értékének az összegét nagyobbítjuk, ha mindegyik tagot a legkisebb indexűvel, vagy annál kisebb számmal helyettesítjük.

Válasszuk szét az összeget az első 100 és a maradó 900 tag összegére. Mivel (5) alapján

$$a_{100}^2 > 225,$$

így azt nyerjük, hogy

$$\sum_{n=0}^{999} \frac{1}{a_n^2} = \sum_{n=0}^{99} \frac{1}{a_n^2} + \sum_{n=100}^{999} \frac{1}{a_n^2} < \frac{100}{a_0^2} + \frac{900}{a_{100}^2} < \frac{100}{25} + \frac{900}{225} = 4 + 4 = 8.$$

Ezzel a kívántnál valamivel jobb felső becslést kaptunk.

Megjegyzések. A megoldásban alkalmazott meggondoláshoz hasonlóan okoskodhatunk az eredeti képzési szabály alapján is, amint ezt többen is tették. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$a_{n+k} = a_n + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} + \ldots + \frac{1}{a_{n+k-1}} > a_n + \frac{k}{a_n}.$$

Ennek alapján azonban lényegesen nagyobb, közel egy egységnyire eső korlátok közé sikerült csak szorítani a versenyzőknek a_{1000}-et.

2. Egy elektronikus zsebszámológép 6,5 perc alatt kiszámította az a_{1000}-t és a 45,0245458 értéket adta. A feladat állításának bizonyításához ezen az eredményen túl a számítási hiba megbecslése is szükséges volna.