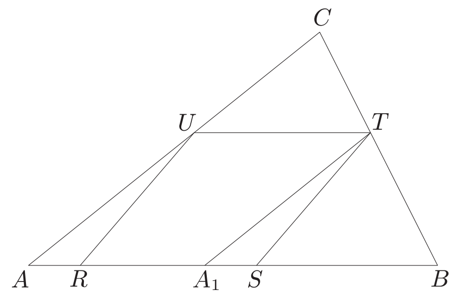
Megoldás. A feladatban megfogalmazott állítás nem igaz. Ennek belátására elég megadni egy sokszöget, amelybe írható négyszög úgy, hogy minden oldala nagyobb, mint bármelyik beírt rombusz oldala.

Sokszögnek olyan egyenlőszárú háromszöget választunk, amelyiknek a szárai kisebbek a harmadik oldalnál. Megmutatjuk először, hogy minden ebbe beírható rombusz oldala kisebb egy, a legnagyobb oldal felénél kisebb d távolságnál.

Általában, egy háromszögbe beírt négyszöghöz van a háromszögnek olyan oldala, amelyikre két négyszögcsúcs esik. Essék az ABC háromszögbe írt $RSTU$ rombusz R, S csúcsa az AB oldalra, legyen $URS\sphericalangle \leq 90^\circ$ és válasszuk a háromszög betűzését úgy, hogy R közelebb legyen A-hoz, mint S, egybe is eshet vele. Húzzunk T-ből párhuzamost AC-vel, messe ez AB-t A_1-ben (1. ábra).



1. ábra

Ekkor az A_1BT háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, és $AA_1 = UT = RS$, így

$$AB = RS + A_1B = RS + \frac{A_1B}{ST} \cdot ST.$$

Mivel a jelölést úgy választottuk, hogy $URS\sphericalangle \leq 90^\circ$, így $A_1ST\sphericalangle = 180^\circ - TSB\sphericalangle = 180^\circ - URS\sphericalangle \geq 90^\circ$, tehát $ST < A_1T$, kivéve ha R és A, s így egyben S és A_1 is egybeesik. Továbbá $ST = RS$. Ezeket felhasználva

$$AB \geq RS\left(1 + \frac{A_1B}{A_1T}\right) = RS\left(1 + \frac{AB}{AC}\right),$$

azaz

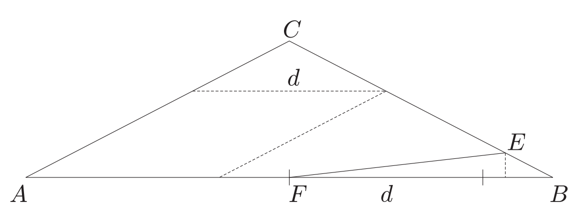
$$RS \leq \frac{AB}{1 + \dfrac{AB}{AC}} = \frac{1}{\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}}.$$

Ez akkor a legnagyobb, ha AB és AC a háromszög két legnagyobb oldala, és akkor is kisebb a legnagyobb oldal felénél, kivéve, ha $AB = AC \geq BC$.

Ezzel fenti állításunkat igazoltuk: ha $AB > AC = BC$, akkor semelyik beírt rombusz oldala sem nagyobb, mint

$$d = \frac{1}{\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}}, \text{ ami kisebb, mint } \frac{1}{2}AB.$$

Azt kell még megmutatnunk, hogy írható az ABC háromszögbe olyan négyszög, amelyiknek mindegyik oldala nagyobb d-nél. Válasszuk a négyszög csúcsainak az AB oldal F felezőpontját, A-t, C-t, továbbá a BC oldalnak egy olyan E pontját, amelyiknek a merőleges vetülete AB-n d-nél nagyobb távolságra esik F-től (2. ábra). Ekkor a négyszög minden oldalának a merőleges vetülete AB-n nagyobb d-nél, tehát az oldalak is nagyobbak. Ezzel a feladatban megfogalmazott állítást megcáfoltuk.



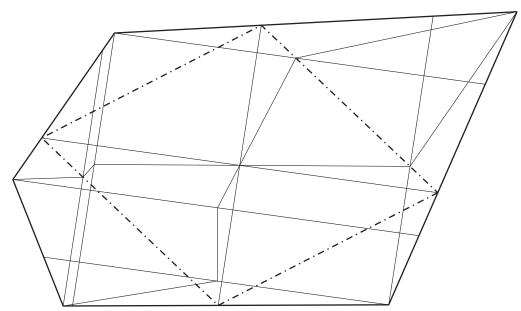
2. ábra

Megjegyzések. 1. A fenti meggondolás azt is mutatja, hogy a rombusz oldalára talált felső korlát elérhető, ha a rombusz csúcsa egybeesik a két legnagyobb oldal közös csúcsával.

2. Többen felvetették a kérdést, vajon írható-e minden konvex sokszögbe rombusz. A feladat szempontjából nem lényeges ez a kérdés, hiszen a megfogalmazott állítást cáfoltuk. Ha a most feltett kérdésre tagadó lenne a válasz, az mindössze egy más természetű ellenpéldára vezetne.

Nem nehéz azonban látni, hogy ez az eset nem léphet fel, sőt tetszés szerinti irányhoz beírható olyan rombusz, amelynek egyik átlója ezzel az iránnyal párhuzamos. Valóban, a sokszög adott iránnyal párhuzamosan húzható szelőinek a felezőpontjai egy törtvonalon helyezkednek el. Húzzunk ugyanis minden csúcson át az iránnyal párhuzamos szelőt. Ezek trapézokra és általában két vagy egy, esetleg 0 háromszögre bontják a sokszöget. A háromszögbeli szelők felezőpontjai egy súlyvonalon, a trapézbeliekéi a párhuzamos oldalak felezőpontjait összekötő szakaszon helyezkednek el.

Az eljárást megismételve az adott irányra merőleges iránnyal is, a keletkezett két törtvonal közös pontja olyan lesz, hogy azon át az adott iránnyal párhuzamost és arra merőlegest húzva ezek egy rombusz csúcsait metszik ki a sokszög határából (3. ábra).



3. ábra

Egy versenyző más meggondolással azt is megmutatta, hogy tetszés szerinti irányt adva meg, olyan beírt rombusz is létezik, amelyiknek az egyik oldalpárja adott irányú.