I. megoldás. A feltételek szerint a nevezőben szereplő kifejezések 0-tól különbözők, így a kifejezéseknek mindig van értelme. (1)-ben b-nek első és második hatványa fordul elő, így tekinthetjük b-re vonatkozóan másodfokú egyenletnek. Redukáljuk 0-ra:

$$2a\frac{a^2+c^2}{(a^2-c^2)^2}b^2-b-a=0.$$

Feltételeink szerint b ennek pozitív gyöke. Mivel a másodfokú tag együtthatója és a konstans tag ellenkező előjelű, a másodfokú egyenletnek egy pozitív és egy negatív gyöke van. Eszerint az adott összefüggés pontosan akkor áll fenn, ha

$$\begin{aligned} b&=\frac{-1+\sqrt{1+8a^2(a^2+c^2)/(a^2-c^2)^2}}{4a(a^2+c^2)/(a^2-c^2)^2}=\\ &=\frac{(a^2-c^2)\left(c^2-a^2+\sqrt{(a^2-c^2)^2+8a^2(a^2+c^2)}\right)}{4a(a^2+c^2)}=\\ &=\frac{(a^2-c^2)\left(c^2-a^2+\sqrt{9a^4+6a^2c^2+c^4}\right)}{4a(a^2+c^2)}. \end{aligned}$$

Itt a négyzetgyökös kifejezés $(3a^2+c^2)$-tel egyenlő, mert ez pozitív, és ennek a négyzete áll a gyökjel alatt. A 0-tól kölönböző $2(a^2+c^2)$-tel egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$b=\frac{a^2-c^2}{2a}\qquad\text{vagy}\qquad 2ab=a^2-c^2.$$

Ez, mint láttuk, ugyanakkor teljesül, mint a feladatban szereplő összefüggés, tehát annak egyszerűbb alakja.

Megjegyzések. 1. A nyert összefüggésből az is látható, hogy $a\geq 2b$.

2. Többen c^2-re vonatkozóan tekintették másodfokú egyenletnek az adott összefüggést. Ezen az úton kicsit bonyolult számítás vezet el a fenti eredményhez.

II. megoldás. Az (1) összefüggésből az $a>c\geq 0$ feltétel folytán vele egyenértékű összefüggést kapunk, ha $(a^2-c^2)^2$-nel megszorozzuk mindkét oldalt. Jelöljük (a^2-c^2)-et átmenetileg d-vel, ekkor c^2-et d-vel fejezve ki $a^2+c^2=2a^2-d$, s így a következőt kapjuk:

$$4a^3b^2-2ab^2d=ad^2-bd^2,$$

a bal oldalon

$$2ab-\frac{bd}{2a}$$

négyzetének a-szorosát kapjuk, ha a két oldalhoz $b^2d^2/4a$-t adunk:

$$a\left(2ab-\frac{bd}{2a}\right)^2=\frac{b^2d^2}{4a}+ad^2-bd^2=\frac{1}{4a}(b^2d^2+4a^2d^2-4abd^2)=\frac{1}{4a}(2ad-bd)^2.$$

Szorozzunk $4a$-val és redukáljunk 0-ra. Ekkor a keletkező kifejezés szorzattá alakítható:

$$\begin{aligned} &(4a^2b-bd)^2-(2ad-bd)^2=(4a^2b+2ad-2bd)(4a^2b-2ad)=\\ &=4a\big((a^2+c^2)b+a(a^2-c^2)\big)(2ab-a^2+c^2). \end{aligned}$$

Az első tényező az $a>c\geq 0$ feltétel miatt pozitív, így a szorzat akkor 0, ha

$$2ab-a^2+c^2=0. \tag{2}$$

Ez az összefüggés tehát akkor és csak akkor teljesül, ha (1) fennáll.

Megjegyzés. A (2) összefüggést tekinthetjük másodfokú egyenletnek a-ra vonatkozóan. Ennek is egy pozitív és egy negatív gyöke van. Így az $a>0$ feltétel szerint

$$a=b+\sqrt{c^2+b^2}.$$

Ez az összefüggés is ekvivalens tehát az (1) összefüggéssel. Nem szoktuk egyszerűbbnek tekinteni (2)-nél pl. a benne fellépő négyzetgyökvonás miatt, ez azonban végső soron ízlés kérdése csak.

A nyert eredmény érdekes abból a szempontból, hogy mutatja: az adott feltételek mellett az (1) összefüggésben bármelyik két mennyiség egyértelműen határozza meg a harmadikat. Mint láttuk, a és b megadása esetén még az $a\geq 2b$ feltételnek is kell teljesülnie.