I. megoldás. Jelöljük a feladatban szereplő polinomot P_{2k}-val. A feladat állításán kicsit túlmenve azt mutatjuk meg, hogy minden x értékre

$$P_{2k}(x) > 0.$$

Ha x negatív vagy 0, akkor egyik tag sem negatív, a konstans pedig 1, így legalább ennyi a polinom értéke is. Könnyű belátni az állítás helyességét akkor is, ha $x \geq 2k$. Ekkor ugyanis

$$P_{2k}(x) = 1 + \frac{x}{2!}(x-2) + \frac{x^3}{4!}(x-4) + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{(2k)!}(x-2k) \geq 1.$$

A $[0, 2k]$ zárt számközben a polinom folytonos függvény, az pedig felveszi a minimumát. Ha valamelyik végpontban veszi fel, akkor ez a minimum is pozitív, tehát minden érték pozitív.

Ha az intervallum belsejében levő valamilyen x_0 helyen veszi fel P_{2k} a minimumát, akkor ez a környezetéhez képest is minimális érték, így itt a deriváltja 0,

$$P'_{2k}(x) = -1 + x_0 - \frac{x_0^2}{2!} + \ldots + \frac{x_0^{2k-1}}{(2k-1)!} = \frac{x_0^{2k}}{(2k)!} - P_{2k}(x_0) = 0.$$

Ekkor azonban a legkisebb függvényértékre

$$P_{2k}(x_0) = \frac{x_0^{2k}}{(2k)!} > 0,$$

s így a függvény értéke mindenütt pozitív.

Megjegyzések. 1. Beláthatjuk a feladat állításának helyességét a k szerinti teljes indukcióval is. $k=1$-re teljes négyzetté kiegészítéssel látható az állítás helyessége. Tegyük most fel, hogy k-nak valamilyen k_0 értékére helyes az állítás, és lássuk be, hogy ez maga után vonja a helyességét (k_0+1)-re is. P_{2k_0} a $-P_{2k_0+1}$ polinom deriváltja, így az utóbbi az egész számegyenesen növekszik. A 0 helyen -1 az értéke, és a föntihez hasonló párosítással – most az első tagtól kezdve – látható, hogy a $(2k_0+1)$ helyen pozitív. Mivel a függvény folytonos, így felveszi valamilyen 0 és $(2k_0+1)$ közötti x_0 helyen a 0 értéket. De $-P_{2k+1}$ a P_{2k_0+2} polinom deriváltja, így az utóbbinak az x_0 helyen minimuma van és a fenti módon látható, hogy ez pozitív.

Ez a meggondolás azt is adta, hogy a P_{2k} polinomnak egy lokális minimuma van, odáig csökken a függvény, onnan növekszik.

2. Indirekt meggondolást is használhatunk. Ha P_{2k} venne fel negatív értéket, akkor ezt csak a $(0, 2k)$ intervallum belsejében vehetné fel. Ekkor minimuma is negatív volna és lokális minimum. Ez azonban nem lehetséges, mert itt

$$P'_{2k}(x) = \frac{x^{2k}}{(2k)!} - P_{2k}(x)$$

pozitív volna és nem 0.

Megoldható a feladat csupán algebrai átalakításokat, és a binomiális együtthatók tulajdonságait felhasználva is.

II. megoldás. Szorozzuk meg $P_{2k}(x)$-et a

$$P_{2k}(-x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

értékkel. A szorzat j-edfokú tagjának együtthatója, ha $j \leq 2k$,

$$1 \cdot \frac{1}{j!} - 1 \cdot \frac{1}{(j-1)!} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(j-2)!} + \ldots + (-1)^j \frac{1}{j!} \cdot 1 =$$
$$= \frac{1}{j!}\left(\binom{j}{0} - \binom{j}{1} + \binom{j}{2} - \ldots + (-1)^j \binom{j}{j}\right) = 0.$$

Ha pedig $2k+1 \leq j \leq 4k$, akkor az együttható

$$(-1)^{j-2k} \cdot \frac{1}{(j-2k)!} \cdot \frac{1}{(2k)!} + (-1)^{j-2k+1} \frac{1}{(j-2k+1)!} \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{(2k-1)!} + \ldots + (-1)^{2k} \frac{1}{(2k)!} \cdot \frac{1}{(j-2k)!} = \frac{1}{j!}\Bigg((-1)^{j-2k}\binom{j}{j-2k} +$$
$$+ (-1)^{j-2k+1}\binom{j}{j-2k+1} + \ldots + (-1)^{2k}\binom{j}{2k}\Bigg).$$

Az összeg két végéről számított ugyanannyiadik tag abszolút értéke mindig megegyezik, így páratlan j esetén továbbra is 0 az együttható. Ha viszont j páros, akkor a j-edik hatványhoz tartozó összes binomiális együttható váltakozó előjellel vett összegéből – aminek az értéke 0 – hiányzik az elejéről a

$$\binom{j}{0} - \binom{j}{1} + \binom{j}{2} - \binom{j}{3} + \ldots + (-1)^{j-2k-1}\binom{j}{j-2k-1}$$

összeg és a végéről egy ezzel egyenlő összeg. Ez az összeg azonban negatív, mert a tagok abszolút értéke növekszik, miután az alsó számok mind kisebbek, mint $j/2$, az előjelek váltakoznak, a tagok száma pedig páros. A j-edfokú tag együtthatója ennek a negatív összegnek a kétszeresét 0-ra egészíti ki, tehát pozitív.

A polinomok szorzata tehát x páros hatványainak pozitív együtthatós összege, s így minden x értékre pozitív. Ha x nem negatív, akkor a szorzat második tényezője pozitív, negatív x-ekre pedig az első, így mind a két tényező mindig pozitív. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Nem nehéz megmutatni, hogy

$$\binom{j}{0} - \binom{j}{1} + \binom{j}{2} - \ldots + (-1)^l \binom{j}{l} = (-1)^l \binom{j-1}{l}.$$

Így

$$P_{2k}(x)P_{2k}(-x) = 1 + \frac{x^{2k+2}}{(2k)!(k+1)} + \frac{x^{2k+4}}{(2k)!3!(k+2)} + \frac{x^{2k+6}}{(2k)!5!(k+3)} + \ldots + \frac{x^{4k}}{(2k!)^2}$$