Nevezzük röviden *csúcspontnak* az olyan pontot, mely három adott sík közös pontja. A feltételek szerint bármely három sík egyetlen csúcspontot határoz meg.

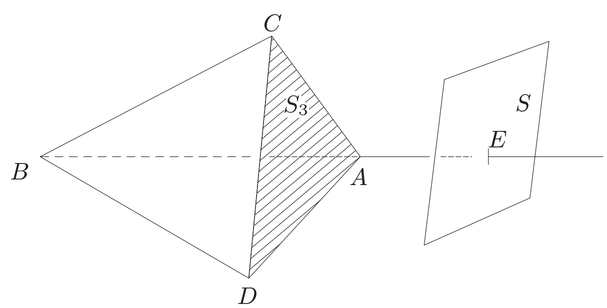
Jegyezzük meg továbbá, hogy négy adott sík mindig közrezár egy (és csakis egy) tetraédert. Ennek belátását az olvasóra bízzuk. Természetesen e tetraéderbe más sík belemetszhet, tehát általában nem szerepel a tekintett térrészek között.

Legyen mármost S egy adott sík és P olyan csúcspont, mely nincs az S síkon, de az összes olyan csúcspont között, mely S-nek P-vel azonos oldalán helyezkedik el, S-hez legközelebb van. Legyenek S_1, S_2, S_3 a P-t meghatározó síkok. Ekkor S, S_1, S_2, S_3 egy T tetraédert zár közre. *Állítjuk, hogy a T tetraédert további adott sík nem metszi, tehát T egyike azon térrészeknek, melyekre az n sík a teret darabolja.*

Tegyük fel, hogy egy további adott S' sík metszi a T tetraédert. Legyenek A, B, C a tetraéder P-től különböző csúcsai; A, B, C az S síkon helyezkedik el. Nyilvánvalóan kell, hogy az S' sík messe az AP, BP, CP szakaszok valamelyikét. Tegyük fel például, hogy S' az AP szakaszt metszi egy Q pontban. Ekkor Q is csúcspont, hiszen AP két adott sík metszésvonala, és így Q három adott sík metszéspontja. De Q közelebb van S-hez, mint P, ami ellentmond P választásának.

A fentiek alapján az adott síkok bármelyikéhez találhatunk rá támaszkodó tetraédert a síkok által létrehozott térrészek között. Sőt, ha S olyan sík, melynek mindkét oldalán van csúcspont, akkor S-re két ilyen tetraéder is támaszkodik.

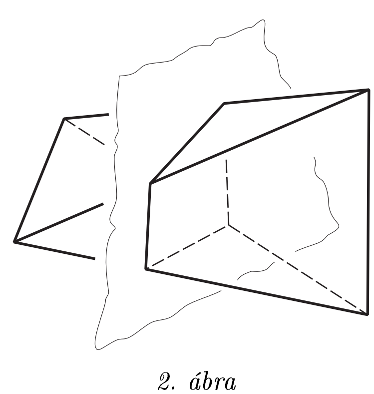
Állítjuk, hogy *legfeljebb három síknak lehet minden csúcspont ugyanazon az oldalán.* Tegyük fel, hogy négy ilyen sík is volna, S_1, S_2, S_3, S_4. Legyen $ABCD$ az S_1, S_2, S_3, S_4 által alkotott tetraéder, ahol S_1 az ABC, S_2 az ABD, S_3 az ACD, S_4 a BCD síkkal azonos. Mivel $n \geq 5$, van egy további S sík az adott síkok között. Az S sík nyilván nem metszheti az $ABCD$ tetraéder valamennyi élét, tehát például az AB él egyenesét egy, az élhez nem tartozó E pontban metszi. Legyen például E az AB egyenes A-ból kiinduló, B-t nem tartalmazó félegyenesén. Mármost E és B az $S_3 = ACD$ sík különböző oldalain elhelyezkedő csúcspontok, ami ellentmondás (1. ábra).



1. ábra

Számoljuk mármost össze a síkok által létrehozott térrészek közti tetraédereket úgy, hogy minden síkhoz megszámoljuk a rá támaszkodókat. Láttuk az előbb, hogy legfeljebb három kivételével minden síkra legalább két tetraéder támaszkodik; a „kivételes” síkokra legalább egy. Így legalább $2n-3$ tetraédert számolunk. Mivel azonban minden tetraédert négyszer számolhattunk (a négy lapsíkjánál), a tetraéderek száma legalább $\dfrac{2n-3}{4}$, amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzések: 1. Több versenyző „felhasználta”, hogy ha egy tetraédert síkkal metszünk, akkor keletkező darabjainak egyike tetraéder. Ez az állítás nem igaz; ha egy tetraédert olyan síkkal metszünk, mely két kitérő élét elválasztja (de egyiket sem metszi), akkor két „háztető” (ötlapú test) keletkezik (2. ábra).



2. ábra

2. A feladat egyszerűbb változata síkbeli probléma: *ha n egyenes a síkban úgy helyezkedik el, hogy semelyik kettő nem párhuzamos és semelyik három nem halad át egy ponton, akkor az általuk létrehozott síkrészek között legalább $\dfrac{2n-2}{3}$ háromszög van.* Ez az állítás a térbeli feladathoz hasonlóan igazolható.

3. Felvetődik a kérdés, hogy a $\frac{2n-3}{4}$ korlát mennyire éles, vagyis nem bizonyítható-e ennél erősebb állítás. Hasonló kérdezhető a 2. pontban említett feladattal kapcsolatban is. Erre a problémára külön cikkben visszatérünk.