A sík egész koordinátájú pontjait rácspontnak fogjuk nevezni.

**I. megoldás.** Feladatunk tetszés szerinti pozitív $p$ értékhez olyan korlátot keresni, amelynél nagyobb $r$ sugár esetén mindig van az $r$ sugarú körtől $p$-nél kisebb távolságra levő rácspont. Kézenfekvő olyan egyenesen keresni ilyen rácspontot, amelyiken egyrészt sűrűn vannak rácspontok, másrészt, amelyik „lehetőleg jól simul” a körhöz, kis hegyes szögben metszi.[1] A rácspontok legsűrűbben – egymástól 1 távolságra – a koordinátatengelyekkel párhuzamos és a megfelelő tengelytől egész távolságra levő egyeneseken sorakoznak. Válasszuk pl. az $y$ tengellyel párhuzamos ilyen egyenesek közül a legtávolabbit, amelyiknek még van közös pontja a körrel. Ennek az $y$ tengelytől mért $u$ távolságára

$$u \le r < u+1 \qquad (u \text{ egész}). \tag{1}$$

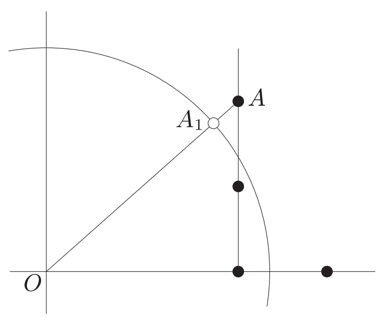
Ezen az egyenesen a kört közrefogó $(u,v)$, $(u,v+1)$ rácspontok ordinátájára

$$u^2+v^2 \le r^2 < u^2+(v+1)^2 \qquad (v \text{ egész}). \tag{2}$$

A körön kívül levő $A$ rácspontot az $O$ origóval összekötő egyenes messe a kört $A_1$-ben. Ekkor

$$\delta(r) \le AA_1 = OA - r = \sqrt{u^2+(v+1)^2} - r = \frac{u^2+(v+1)^2-r^2}{\sqrt{u^2+(v+1)^2}+r} =$$
$$= \frac{2v+1-(r^2-u^2-v^2)}{\sqrt{u^2+(v+1)^2}+r} < \frac{2v+1}{2r},$$

ugyanis a számlálóban elhagyott kivonandó a (2) egyenlőtlenség első fele szerint nem negatív, a nevezőben levő négyzetgyök pedig az egyenlőtlenség második fele szerint nagyobb $r$-nél.




(2) első fele és (1) segítségével kapcsolatot találunk $v$ és $r$ között is:

$$v \le \sqrt{r^2-u^2} = \sqrt{(r-u)(r+u)} < \sqrt{1\cdot(r+r)} = \sqrt{2r}.$$

Ezt felhasználva, ha pl. $r>1$, akkor

$$\delta(r) < \frac{2\sqrt{2r}+1}{2r} < \frac{3\sqrt{r}+\sqrt{r}}{2r} < \frac{2}{\sqrt{r}}.$$

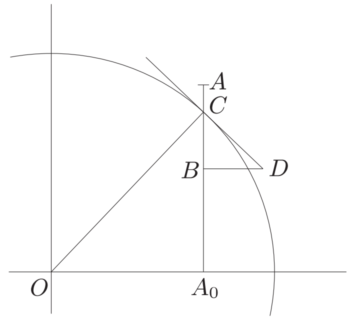
Így $\delta(r)$ biztosan kisebb lesz $p$-nél, amint

$$\frac{2}{\sqrt{r}} < p \qquad \text{azaz} \qquad r > \frac{4}{p^2} \qquad \text{és} \qquad r > 1.$$

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

*Megjegyzések.* 1. Nyilvánvalóan nyerhettünk volna 2-nél kisebb számlálót a $\delta(r)$-re kapott felső korlátban, de ez nem volt célunk. Csupán azt akartuk belátni, hogy van olyan korlát, amelyiknél nagyobb $r$-ekre $\delta(r) < p$. Hogy mi a legkisebb ilyen korlát, az már a probléma szempontjából lényegtelen, annál is inkább, mert nem feltétlenül a fent kiválasztott $A$ a körhöz legközelebbi rácspont.

[1] Egyenes és kör szögén az egyenesnek és a körrel való metszéspontjában a körhöz húzott érintőnek a szögét szokás érteni. Általában beszélünk két egymást metsző görbe szögéről a metszéspontjukban, – ezen a metszéspontban a görbékhez húzott érintők szögét értjük, feltéve, hogy mindkettőnek van egyértelműen meghatározott érintője ebben a pontban.




2. Sok más módon is becsülték a versenyzők az $A(u,v+1)$ vagy $B(u,v)$ pont távolságát a körtől. Egy ilyen út a következő: az $AB$ egyenes metszéspontját a körrel, ill. az $x$ tengellyel jelölje $C$, ill. $A_0$, a $B$-n át az $x$ tengellyel párhuzamosan húzott egyenes és a körhöz a $C$-ben húzott érintő metszéspontját $D$. Ekkor $B$ távolsága a körtől kisebb, mint $BD$, így a $BCD$ és $A_0OC$ háromszögek hasonlósága folytán

$$\delta(r) < BD = \frac{BD}{1} = \frac{BD}{AB} < \frac{BD}{BC} = \frac{A_0C}{A_0O} = \frac{\sqrt{r^2-u^2}}{u} <$$
$$< \frac{\sqrt{2r}}{u} < \frac{\sqrt{2r}}{r-1} < \frac{\sqrt{2r}}{r-\frac{r}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r}},$$

ha $r>2$; így

$$\delta(r) < p, \qquad \text{ha} \quad \text{egyidejűleg} \quad r > \frac{8}{p^2} \qquad \text{és} \qquad r > 2.$$

3. A feladat szoros kapcsolatban van a következő kérdéssel. Keressünk tetszés szerinti pozitív egész $N$ számhoz olyan $M(N)$ számot, amelyre az $N$, $N+M(N)$ számközben van két négyzetszám összegeként írható szám.

Ha $N$-et a fenti megoldás $r^2$-ének választjuk, az $n = u^2+(v+1)^2$ tekinthető egy közeli négyzetszámnak:

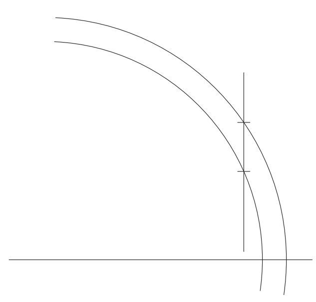
$$n - N = u^2 + (v+1)^2 - r^2 < 2v+1,$$

és mivel $n-N$ egész, így

$$n - N \le 2v < 2\sqrt{2r} = \sqrt{8}\sqrt[4]{N}.$$

Az $N$, $N+\sqrt{8}\sqrt[4]{N}$ számközben tehát mindig van két négyzetszám összegeként írható szám.

**II. megoldás.** Mivel az $x=u$ ($u$ pozitív egész) egyenlettel jellemzett egyenesen egységnyi távolságra követik egymást a rácspontok, így elég megmutatni, hogy tetszőleges pozitív $p$-hez, ha $r$ elég nagy, választható $u$ úgy, hogy az $x=u$ egyenletű egyenesnek az $r$ és $r+p$ sugarú körök közti körgyűrűbe eső szakasza, – pl. az első síknegyedben – legalább 1 hosszúságú legyen. Ekkor ugyanis erre a szakaszra esik rácspont és az legfeljebb $p$ távolságra van a körtől.



Válasszuk meg $u$-t az

$$u \le r < u+1$$

feltétellel. Ha $u+1 \le r+p$, akkor az $(u+1,0)$ pont a körgyűrűbe esik; így elég csak azt az esetet vizsgálni, ha

$$u \le r < r+p < u+1. \tag{3}$$

Ez eleve csak akkor teljesülhet, ha $p<1$. Az említett szakasz $h$ hosszára

$$h = \sqrt{(r+p)^2-u^2} - \sqrt{r^2-u^2} = \frac{(r+p)^2-r^2}{\sqrt{(r+p)^2-u^2}+\sqrt{r^2-u^2}}.$$

Itt a számláló nagyobb, mint $2rp$, a nevezőben levő négyzetgyökök pedig így becsülhetők felülről (3) felhasználásával, ha pl. $r > 1$,

$$\sqrt{(r+p)^2 - u^2} = \sqrt{(r+p-u)(r+p+u)} < \sqrt{1 \cdot (r+1+r)} < \sqrt{3r},$$
$$\sqrt{r^2 - u^2} = \sqrt{(r-u)(r+u)} < \sqrt{1 \cdot 2r}.$$

Így

$$h > \frac{2rp}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\sqrt{r}} = \frac{2p}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{r},$$

tehát $h > 1$, ha

$$r > \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{4p^2} = \frac{5+\sqrt{24}}{4} \cdot \frac{1}{p^2}.$$

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.