A feladat követelménye szerint a szomszédos binomiális együtthatópárok különbsége egyenlő kell hogy legyen, vagyis a különbségek különbsége 0:

$$\binom{n}{k-1} - 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = 0. \tag{1}$$

Itt feltesszük, hogy $k-1 \geq 0$ és $k+1 \leq n$, azaz

$$1 \leq k \leq n-1. \tag{2}$$

Ha az (1) egyenlőség teljesül – és csak akkor – alkot számtani sorozatot a három binomiális együttható.

Szorozzunk $(k+1)!(n-k+1)!/n!$-sal. Ez (2) folytán létezik és pozitív, így (1) akkor és csak akkor teljesül, ha

$$k(k+1) - 2(k+1)(n-k+1) + (n-k)(n-k+1) = 0,$$

$$n^2 - 4nk + 4k^2 - n - 2 = 0. \tag{3}$$

Eszerint

$$n = (n-2k)^2 - 2,$$

egy egész szám négyzeténél 2-vel kisebb:

$$n = u^2 - 2$$

alakú, ahol u természetes szám és itt $u = n - 2k$ vagy $u = 2k - n$, azaz

$$k = k_1 = \frac{n-u}{2} = \frac{u^2-u}{2} - 1 = \binom{u}{2} - 1$$

vagy

$$k = k_2 = \frac{n+u}{2} = \binom{u+1}{2} - 1.$$

Az utolsó alakból látható, hogy k-ra egész értéket kapunk.

Itt $u \geq 2$ kell hogy legyen, hogy n pozitív egésznek adódjék. Az $u = 2$-höz tartozó két k értékre azonban (2) első, ill. második egyenlőtlensége nem teljesül.

Ha $u \geq 3$, akkor

$$k_1 = \binom{u}{2} - 1 \geq 1 \qquad \text{és} \qquad k_1 = \frac{n-u}{2} < n.$$

Mivel pedig $k_1 + k_2 = n$, és $k_1 < k_2$, így mindkét k érték kielégíti (2)-t.

A feladat követelményei teljesülésének szükséges és elégséges feltételéből indultunk ki és ekvivalens átalakításokat végeztünk, így azok az n, k számpárok felelnek meg, amelyeknél valamilyen 2-nél nagyobb u egésszel

$$n = u^2 - 2 \quad \text{és} \quad k = \binom{u}{2} - 1 \quad \text{vagy} \quad k = \binom{u+1}{2} - 1.$$

Megjegyzések. 1. Még az $u = 2$-höz tartozó $k = 0$ és $k = 2$ érték is elfogadható, ha $\binom{n}{k}$-n 0-t értünk, amennyiben k negatív vagy nagyobb, mint n. Ekkor ugyanis a 0, 1, 2, ill. a 2, 1, 0 számtani sorozatot kapjuk. (Egy versenyző azt is megjegyezte, hogy ezzel a megállapodással bármely pozitív egész n és $k \leq -2$, ill. $k \geq n+2$ érték is megfelel.)

2. A könnyen igazolható

$$\binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}$$

összefüggés két oldalából levonva (1) megfelelő oldalait, adódik, hogy a feladat követelménye akkor és csak akkor teljesül, ha

$$4\binom{n}{k} = \binom{n+2}{k+1}.$$

3. A (3) egyenletet 4-gyel szorozva és n szerint egészítve ki teljes négyzetté,

$$8k + 9 = (2n - 4k - 1)^2$$

adódik, ami páratlan szám négyzete. Ezt $2v+1$-gyel jelölve azt kapjuk, hogy

$$k = \frac{(2v+1)^2 - 9}{8} = \frac{v^2 + v - 2}{2} = \binom{v+1}{2} - 1$$

és

$$2n-4k-1=2v+1 \qquad \text{vagy} \qquad 4k+1-2n=2v+1.$$

Innen

$$n=2k+v+1=v^2+2v-1=(v+1)^2-2$$

vagy

$$n=2k-v=v^2-2.$$

4. A megoldásban szereplő két k értékről leolvasható, hogy minden megengedett n értékhez tartozó nagyobbik k érték megegyezik a következő szóbajövő n értékhez tartozó kisebbik k értékkel.

5. Ha azt kérdezzük, alkothat-e háromnál több egymás utáni binomiális együttható számtani sorozatot, igen könnyű látni, hogy tagadó a válasz. Ekkor ugyanis a sorozat első, második és harmadik eleme is meg a második, harmadik és negyedik elem is háromtagú számtani sorozatot alkotna. Azonban a feladat megoldásában kiderült, hogy az egy n értékhez tartozó két k értéknek szimmetrikusan elhelyezkedő binomiális együtthatók felelnek meg, így a két nyert 3 elemű sorozat egyike növekedő, a másik csökkenő, nem lehetnek ugyanannak a sorozatnak egymás utáni elemei.

6. A számtani sorozatok az olyan sorozatok, amelyeknél a szomszédos elemek különbsége csupa egyező elemből álló sorozat. Hasonlóan vizsgálhatunk olyan sorozatokat – ún. másodrendű számtani sorozatokat –, amelyeknél ezek a különbségek alkotnak számtani sorozatot, és hasonlóan értelmezhetők magasabb rendű számtani sorozatok. Felmerül a kérdés: alkothat-e négy egymás utáni binomiális együttható másodrendű számtani sorozatot. A probléma a fentiekhez hasonlóan egy n-ben és k-ban harmadfokú egyenletre vezet. Található azonban végtelen sok megoldás a következő egyszerű meggondolással: Ha n páratlan, $2u+1$ alakú, akkor az n-hez tartozó binomiális együtthatók sorozatának közepén két egyenlő binomiális együttható áll és az ezek előtti és utáni binomiális együtthatók is egyenlők. A

$$\binom{2u+1}{u-1}, \quad \binom{2u+1}{u}, \quad \binom{2u+1}{u+1}, \quad \binom{2u+1}{u+2}$$

számok különbségei tehát a, 0, $-a$ alakúak, és ez számtani sorozat. Ez arra is vezet, hogy az említett harmadfokú egyenletet könnyű megoldani: a fellépő polinom egy első és egy másodfokú szorzatára bontható, s így már könnyen megtalálhatók a további megoldások.