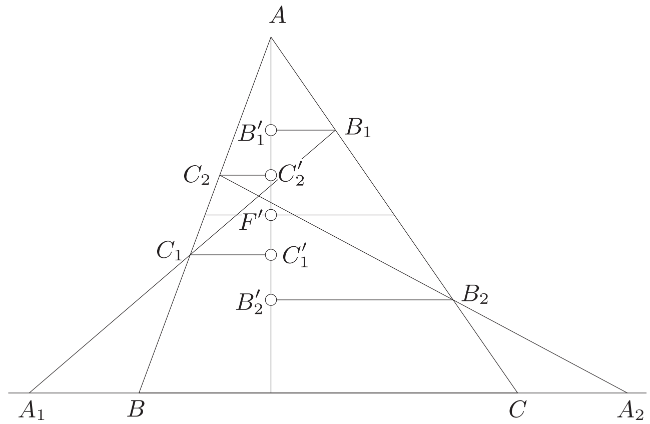
I. megoldás. Jelöljük a B_1, B_2, C_1, C_2 pontok merőleges vetületét a háromszög A-ból húzott magasságán B_1', B_2', C_1', C_2'-vel. Az AB és AC oldal felezőpontjainak a vetülete a magasságon ugyanaz az F' pont, miután a felezőpontokat összekötő egyenes, a háromszög középvonala, párhuzamos a BC oldallal, tehát merőleges az A-ból húzott magasságra (1. ábra). Így a $B_1'C_1'$ és a $B_2'C_2'$ szakaszok is egymás tükörképei, tehát egyenlő hosszúak (és ellenkező irányúak).



1. ábra

A $B_1'B_1C_1\sphericalangle$ és a $B_1A_1C\sphericalangle$, továbbá a $C_2'C_2B_2\sphericalangle$ és a $C_2A_2B\sphericalangle$ szárai párhuzamosak, tehát sinusaik megegyeznek. Így

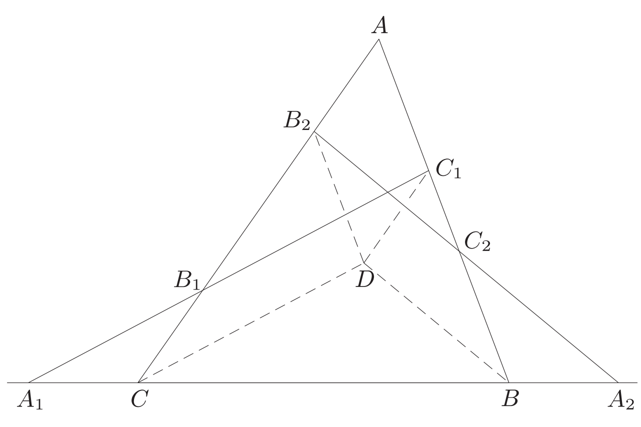
$$\sin B_1A_1C\sphericalangle = \sin B_1'B_1C_1\sphericalangle = \frac{B_1'C_1'}{B_1C_1},$$
$$\sin C_2A_2B\sphericalangle = \sin C_2'C_2B_2\sphericalangle = \frac{C_2'B_2'}{B_2C_2}.$$

A jobb oldali törtek számlálói egyenlők, így a bal és a jobb oldalak hányadosa is megegyezik, ami a kívánt egyenlőséget adja.

II. megoldás. Toljuk el a B_1C_1 szakaszt a B_1C vektorral, legyen C_1 új helyzete D (2. ábra). Ekkor

$$C_1D = B_1C,$$

és a két szakasz egyirányban párhuzamos. A tükrözés folytán viszont az utóbbi szakasz AB_2-vel egyenlő és egyirányú. Így AB_2DC_1 paralelogramma, tehát B_2D, AC_1 és – ismét a tükrözés folytán – C_2B egyirányú, egyenlő szakaszok. Ez viszont azt jelenti, hogy BC_2B_2D is paralelogramma, DB tehát B_2C_2-ből keletkezik párhuzamos eltolással.



2. ábra

A keletkezett BCD háromszögben $DCB\sphericalangle$ és $DBC\sphericalangle$ szárai párhuzamosak a $B_1A_1C\sphericalangle$, ill. $C_2A_2B\sphericalangle$ száraival, s így sinusaik megegyeznek.

A BCD háromszögre a sinustételt alkalmazva nyerjük, hogy

$$\frac{BD}{CD} = \frac{B_2C_2}{B_1C_1} = \frac{\sin DCB\sphericalangle}{\sin DBC\sphericalangle} = \frac{\sin B_1A_1C\sphericalangle}{\sin C_2A_2B\sphericalangle}.$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzések. 1. Egyik bizonyításban sem használtuk ki azt, hogy B_1 és C_1 a megfelelő oldalszakaszon van. Így a feladat állítása igaz minden olyan egyenesre, amelyik metszi mind a három oldalegyenest és nem megy át A-n.

2. A feladat szövege kimondta ugyan, hogy a B_2C_2 és BC egyenes metszi egymást, több versenyző rámutatott azonban, hogy ez következik már abból, hogy B_1C_1 és BC metszik egymást. Valóban, az I. megoldásban az utóbbi tény azt jelenti, hogy B_1' és C_1' különböző, de ekkor B_2' és C_2' is, tehát B_2C_2 sem párhuzamos BC-vel. A II. megoldásban a feltétel azt jelenti, hogy D nem esik BC-re. Ekkor azonban DB és a vele párhuzamos B_2C_2 sem párhuzamos BC-vel.

3. Többen vektorszámítással oldották meg a feladatot, megmutatva hogy a $\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_2C_2}$ eredővektor párhuzamos (sőt egyenlő) a $\overrightarrow{CB}$ vektorral. Ez könnyen adódik, ha pl. a fellépő vektorokat a $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{AB}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre bontjuk.