

**I. Megoldás.** Megadunk egy utasítást arra, hogyan kell a még nem színezett szakaszokat színezni. Legyen  $AB$  egy olyan szakasz, amelynek végpontjai az adott pontok közül valók és amely még nincs kiszínezve. A feltétel szerint létezik egy és csakis egy olyan törött vonal, mely eredetileg színezett szakaszokból áll és  $A$ -t  $B$ -vel köti össze. Jelölje  $V_{AB}$  ezt a törött vonalat. Legyen mármost az  $AB$  szakasz

kék, ha  $V_{AB}$  páratlan sok kék szakaszt tartalmaz és legyen

piros, ha  $V_{AB}$  páros sok kék szakaszt tartalmaz.

(Megjegyezzük, hogy ez a „színezési szabály” akkor is érvényes, ha  $AB$  már eleve is színezett volt.)

Megmutatjuk, hogy a fenti „színezési szabály” kielégíti a feladat követelményeit. Legyen e célból  $ABC$  tetszőleges háromszög, melynek csúcsai az adott pontok közül valók.

Először is *megadható olyan  $D$  pont, melyből az  $A$ -ba,  $B$ -be,  $C$ -be vezető, eredetileg színezett szakaszokból álló  $V_{DA}$ ,  $V_{DB}$ ,  $V_{DC}$  utaknak nincsen  $D$ -től különböző közös pontjuk* (megengedjük itt, hogy  $D$  egybeessen pl.  $A$ -val, ekkor  $V_{DA}$  egyetlen pontból áll). Tekintsük ugyanis az  $A$ -t  $B$ -vel összekötő, eredetileg színezett szakaszokból álló  $V_{AB}$  utat.  $C$ -ből  $A$  felé elindulva a  $V_{CA}$  úton, előbb-utóbb elérjük a  $V_{AB}$  út valamely  $D$  pontját (ha  $C$  rajta fekszik a  $V_{AB}$  úton, akkor  $D = C$ ; természetesen az is előfordulhat, hogy  $D = A$  vagy  $D = B$ ). Könnyen látható, hogy az így megszerkesztett  $D$  pont a fenti kikötésnek eleget tesz (5. ábra).

5. ábra

Mármost a fenti színezési szabály szerint, az  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  szakaszok között rendre annyi kék van, ahány páratlan szám előfordul az

- $x = a_{V_{DA}}$  és  $V_{DB}$  utakon fekvő kék szakaszok száma,
- $y = a_{V_{DB}}$  és  $V_{DC}$  utakon fekvő kék szakaszok száma és
- $z = a_{V_{DC}}$  és  $V_{DA}$  utakon fekvő kék szakaszok száma között.

Mivel  $x + y + z$  páros (hiszen  $V_{DA}, V_{DB}, V_{DC}$  utak minden kék szakasza kétszer van beszámítva ebbe az összegbe), az  $ABC$  háromszögnek valóban páros sok kék oldala van.

**II. Megoldás.** Válasszunk ki egy tetszőleges  $A_0$  pontot és színezzük ki sárgára. Ezek után a többi pontot is kiszínezzük sárgával és zölddel a következőképpen: egy  $A_0$ -ból kiinduló, eredetileg is színezett szakaszokból álló törött vonal mentén haladva, az  $i$ -edik pont legyen az  $(i - 1)$ -edikkel azonos színű, ha a kettőt összekötő szakasz piros, és különböző színű, ha az összekötő él kék. Mivel a feltétel szerint bármely pontba egy és csakis egyféleképpen juthatunk el ilyen törött vonalon, azért minden pont színe egyértelműen meg van határozva.

Ezek után a következő „színezési szabályt” adhatjuk meg: az  $AB$  él legyen

piros, ha  $A, B$  mindegyike zöld vagy mindegyike sárga, és legyen

kék, ha  $A, B$  különböző színűek.

Megállapíthatjuk, hogy az eredetileg megszínezett szakaszok e „színezési szabálynak” megfelelően vannak színezve.

Tekintsünk mármost egy tetszőleges  $ABC$  háromszöget, melynek csúcsai az adott pontok közül valók. Ha  $A, B, C$  azonos színűek, akkor az  $AB, BC, AC$  szakaszok mindegyike piros. Ha, mondjuk  $A$  és  $B$  azonos és  $C$  tőlük különböző színű, akkor  $AB$  piros,  $AC$  és  $BC$  kék. A piros szakaszok száma tehát vagy 3 vagy 1, mindenképpen páratlan. Tehát a megadott „színezési szabály” a feladat kikötésének eleget tesz.

**Megjegyzések.** 1. Több dolgozat a pontok száma szerinti teljes indukcióval igazolta az állítást.

2. Megmutatható – erre több versenyző utalt is –, hogy a szakaszoknak a feladatbeli színezése egyértelmű. Legyen ugyanis  $AB$  tetszőleges szakasz. A feltétel szerint  $A$  és  $B$  összeköthető egy, eleve színezett éllekből álló

$$\overline{A_0A_1 \dots A_n} \quad (A_0 = A, \quad A_n = B)$$

törött vonallal. Mármost az  $A_0A_1A_2$  háromszögben páratlan sok piros élnek kell lennie, ez meghatározza az  $A_0A_2$  szakasz színét. Így az  $A_0A_2A_3$  háromszögben már két szakasz színe adott, ez meghatározza az  $A_0A_3$  szakasz színét. Hasonlóan továbbmenve láthatjuk, hogy az  $AB$  szakasz színe is egyértelműen meg van határozva.

3. Elegendő volna a feladatban annyit feltenni, hogy bármely két pont *legfeljebb* egyféleképpen köthető össze eredetileg is megszínezett szakaszokból álló törött vonallal. Ilyenkor ugyanis (mint az könnyen igazolható) meg lehet még néhány további szakaszt színezni úgy, hogy a kapott szakaszokra már a feladat feltétele teljesüljön.