Megoldás. Jelölje k a sokszög hegyesszögeinek számát. Mivel minden hegyesszög kisebb, mint $90°$, a hegyesszögek összege kisebb, mint $k \cdot 90°$. A többi $n-k$ szögről csak annyit tudunk, hogy kisebbek, mint $360°$, így összegük kisebb, mint $(n-k) \cdot 360°$. Így az n-szög szögösszege kisebb, mint

$$k \cdot 90° + (n-k) \cdot 360° = n \cdot 360° - k \cdot 270°.$$

Másrészről azonban az n-szög szögeinek összege $(n-2) \cdot 180°$, tehát

$$(n-2) \cdot 180° < n \cdot 360° - k \cdot 270°,$$

ahonnan rendezés és $90°$-kal való osztás után

$$3k \leq 2n + 4$$

adódik. Mivel mindkét oldalon egész szám áll,

$$3k \leq 2n + 3,$$

és így

$$k \leq \frac{2n}{3} + 1.$$

Így azt kaptuk, hogy egy síkbeli n-szögnek legfeljebb

$$\left[\frac{2n}{3}\right] + 1$$

hegyesszöge lehet (a szögletes zárójel, mint szokásos, a szám egész részét jelöli).

Hozzátartozik még a feladathoz annak megmutatása, hogy ez a korlát el is érhető; más szóval, olyan n-szöget kell konstruálnunk, melyben a hegyesszögek száma pontosan $\left[\frac{2n}{3}\right] + 1$.

Foglalkozzunk először azzal az esettel, amikor n 3-mal osztható, vagyis $n = 3r$. Ekkor $\left[\frac{2n}{3}\right] + 1 = 2r + 1$.

1. ábra

Tekintsünk egy 60°-os körcikket, legyen a körív két végpontja A és B, a körcikk csúcsa P, és osszuk az AB ívet a C_1, $C_2, \ldots, C_{2r-2}$ pontokkal $2r-1$ egyenlő részre. Jelölje S_i a $C_{2i-1}PC_{2i}$ háromszög súlypontját ($i = 1, \ldots, r-1$). Húzzunk S_i-n át párhuzamost PC_{2i-1}-gyel, és messe ez a $C_{2i-2}C_{2i-1}$ egyenest D_{2i-1}-ben, C_0-on A-t értve. Hasonlóképpen legyen D_{2i} a PC_{2i}-vel párhuzamos, S_i-n áthaladó egyenesnek és $C_{2i}C_{2i+1}$-nek metszéspontja, C_{2r-1}-en B-t értve (1. ábra).

Tekintsük mármost a következő sokszöget:

$$\Sigma = PAD_1S_1D_2D_3S_2D_4\ldots D_{2i-1}S_iD_{2i}D_{2i+1}S_{i+1}\ldots D_{2r-3}S_{r-1}D_{2r-2}BP$$

(2. ábra). Ennek nyilván $3r$ csúcsa van és $2r+1$ hegyesszöge a P, A, D_1, $D_2, \ldots, D_{2r-2}$, B csúcsok mindegyikénél hegyesszöge van. Ugyanis az APB szög 60°, a PAD_1 szög a PAC_1 egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögek egyike, tehát hegyesszög, az AD_1S_1 szög pedig ezzel egyenlő, hiszen AD_1S_1 és AC_1P párhuzamos szárú szögek. A többi felsorolt szögről hasonlóan látható be, hogy hegyesszögek.

2. ábra

2. ábra

Másodszor azzal az esettel foglalkozunk, amikor n 3-mal osztva 1-et ad maradékul, vagyis $n = 3r + 1$. Ekkor $\left[\frac{2n}{3}\right] + 1 = 2r + 1$. Az előzőek szerint tudunk olyan $3r$-szöget szerkeszteni, melynek $2r + 1$ hegyesszöge van. Tekintsük az előzőekben megszerkesztett Σ sokszöget, és az AP oldal felező merőlegesén válasszunk egy olyan Q pontot, mely benne van a PAC_1 háromszögben. Ekkor $QAC_1\sphericalangle < PAC_1\sphericalangle$ és $QPB\sphericalangle < APB\sphericalangle$, tehát hegyesszögek, így a Σ sokszög

AP oldalát az AQP töröttvonallal helyettesítve olyan Σ' $(3r+1)$-szöget kapunk, melyben $2r+1$ hegyesszög van (3. ábra).

3. ábra

Végül tekintsük az $n = 3r+2$ esetet. Tekintsük ismét a $3r$ csúcsú Σ sokszöget. Legyen PA, ill. PB (P-hez közelebbi) harmadolópontja Q_1, ill. Q_2, és P-nek Q_1Q_2-re való tükörképe P_1. Ekkor a Σ sokszög AP, PB oldalait az $AQ_1P_1Q_2B$

töröttvonallal helyettesítve olyan Σ'' sokszöget kapunk, melynek $3r+2$ csúcsa és $2r+2=\left[\frac{2n}{3}\right]+1$ hegyesszöge van, hiszen a P helyett fellépő három csúcs közül kettőben, Q_1-ben és Q_2-ben 60°-os, vagyis hegyesszög van (4. ábra).

4. ábra

Megjegyzések. 1. Az olvasóra bízzuk annak belátását, hogy a Σ, Σ', Σ'' sokszögek nem metszik át önmagukat.

2. Számos más módon is konstruálható n szögpontú, $\left[\dfrac{2n}{3}\right]+1$ hegyesszöggel rendelkező sokszög. Több versenyző teljes indukcióval definiálta ezeket, n-ről $n+3$-ra lépve (ekkor $n=3$, 4, 5 esetére meg kell adni egy-egy példát, ami nyilvánvaló). A legtöbb megoldásban Σ a fentihez hasonlóan volt megalkotva, de belőle Σ'-t és Σ''-t már igen sok különböző módon készítették el a versenyzők.

3. Több versenyző megjegyezte, hogy ha csak konvex sokszögekre szorítkoznánk, a hegyesszögek maximális száma 3 volna.