Első feladat. *Bebizonyítandó, hogy nincs olyan, természetes számokból álló végtelen sorozat, amelynek nem minden eleme egyenlő, s amelynek minden eleme (a másodiktól kezdve) a két szomszédos elem harmonikus közepe. (a és b harmonikus közepe* $\frac{2ab}{a+b}$*.)*

Megoldás. Abból az észrevételből indulunk ki, hogy ha h az a, b számok harmonikus közepe, akkor $\frac{1}{h}$ az $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ számok számtani közepe, hiszen a $h = \frac{2ab}{a+b}$ értékre $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$. A feladat állítása eszerint a következő módon fogalmazható át: Bebizonyítandó, hogy a természetes számok reciprokaiból nem alkotható olyan végtelen sorozat, amelyben nem minden elem egyenlő, s amelyben minden elem (a másodiktól kezdve) a két szomszédos elem számtani közepe.

Ez a kijelentés más szóval azt mondja ki, hogy a természetes számok reciprokaiból nem alkotható nem csupa egyenlő számból álló végtelen számtani sorozat. Ennek helyessége nyomban következik abból, hogy a természetes számok reciprokai mindannyian a $[0, 1]$ intervallumban helyezkednek el, viszont egy nem csupa egyenlő számból álló végtelen számtani sorozat elemeinek abszolút értéke minden határon túl nő.

Megjegyzés. 1. Lényeges a feladatnak az a megszorítása, hogy a végtelen sorozat nem minden eleme egyenlő, mert különben pl. $1, 1, 1, \ldots$ ellenpéldát adna a feladat állítására.

2. A feladat állítása akkor is igaz, ha nem természetes, hanem egész számokról szól. Ennek helyessége fenti megoldásunkból nyomban adódik, ha benne a $[0, 1]$ intervallum helyett a $[-1, 1]$ intervallumról szólunk.

3. Nem igaz a feladat állítása, ha benne racionális számok végtelen sorozatáról vagy természetes számok véges (tetszőlegesen előírt hosszúságú) sorozatáról van szó. Az első módosítást az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ sorozat példája cáfolja, a másodikat pedig a véges

$$n!, \frac{n!}{2}, \frac{n!}{3}, \ldots, \frac{n!}{n}$$

sorozat, amelynek minden eleme természetes szám.