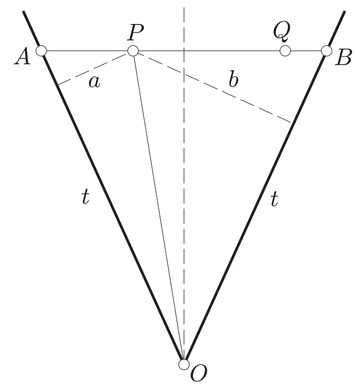
I. megoldás. Segédtételként fel fogjuk használni, hogy egy konvex szögtartomány két pontjának a száregyenesektől való távolságait összeadva akkor és csak akkor kapunk ugyanakkora összeget, ha a két pont összekötő egyenese a szögfelezőre merőleges.

Tekintsük ennek bizonyítása végett az AOB konvex szögtartományban elhelyezkedő P pontot. Messe a P pontból a szögfelezőre bocsátott merőleges a szárakat az A, B pontokban (5. ábra).



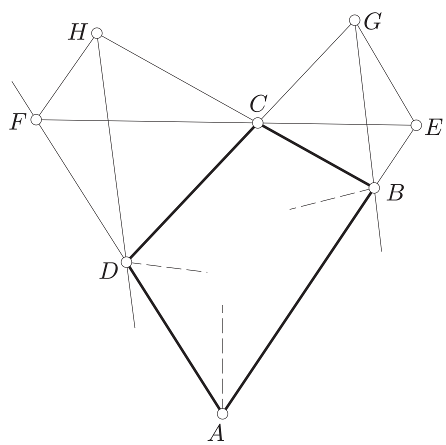
5. ábra

Legyen $OA = OB = t$ és a P pontnak az OA, OB egyenesektől való távolsága a és b. Minthogy az $AOB\Delta$ területe az $AOP\Delta$ és $BOP\Delta$ területének összege, e terület kétszerese $at + bt = (a + b)\,t$. Eszerint a

$$(P,\ AOB\sphericalangle) = a + b$$

távolságösszeg az AB szakasz minden pontjára ugyanakkora, és akkora, mint az A pont távolsága az OB egyenestől. Minthogy azonban az OA szár minden pontja az OB egyenestől más-más távolságra van, a P és Q pontok akkor és csak akkor adnak ugyanakkora távolságösszeget, ha belőlük a szögfelezőre merőlegest bocsátva az OA szárnak ugyanahhoz a pontjához jutunk, ha tehát a PQ egyenes a szögfelezőre merőleges.

A bizonyításra térve feltesszük, hogy a feladat követelménye a konvex $ABCD$ négyszögre teljesül. A bizonyítást kisérő 6. ábra szándékosan torz, hiszen éppen azt kell bizonyítanunk, hogy csak paralelogramma adhatja a helyes ábrát, és ilyen ábra annak felhasználására csábítana, amit bizonyítani akarunk.



6. ábra

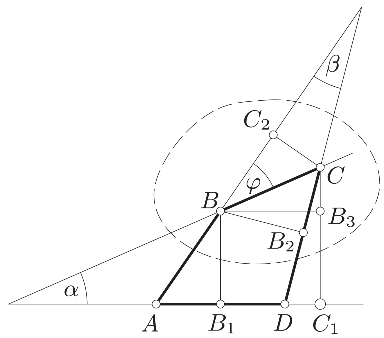
A C ponton át a $BAD\sphericalangle$ felezőjére merőlegest bocsátunk. Messe ez az AB, AD szárakat az E, F pontokban. Az E ponton át AD-vel párhuzamost húzunk, s ez a DC egyenest G-ben metszi. Hasonlóan legyen H a BC egyenes és az F-en át AB-vel húzott párhuzamos metszéspontja. A $CBE\Delta$ és $CHF\Delta$, valamint ugyanígy a $CGE\Delta$ és $CDF\Delta$ hasonló, mert oldalaik páronként egy egyenesen vannak, illetőleg párhuzamosak. Ebből következik, hogy a $CBEG$ és $CHFD$ négyszögek is hasonlók, hogy ezért $CBG\sphericalangle = CHD\sphericalangle$, hogy tehát a BG és DH egyenesek párhuzamosak.

Segédtételünk szerint $(C,\ DAB\sphericalangle) = (E,\ DAB\sphericalangle)$, a párhuzamosság miatt $(E,\ DAB\sphericalangle) = (G,\ ADC\sphericalangle)$, a feladat feltevése szerint pedig $(C,\ DAB\sphericalangle) = (B,\ ADC\sphericalangle)$. Ezekből $(G,\ ADC\sphericalangle) = (B,\ ADC\sphericalangle)$ következik, tehát segédtételünk szerint az is, hogy a GB egyenes az $ADC\sphericalangle$ felezőjére merőleges. Ugyanígy következik, hogy HD merőleges az $ABC\sphericalangle$ felezőjére. Minthogy azonban a most említett egyenesek párhuzamosak, az $ABC\sphericalangle$ és $ADC\sphericalangle$ felezői is párhuzamosak. Ha tehát a $DCB\sphericalangle$-et egy ezekkel a szögfelezőkkel párhuzamos egyenesre tükrözzük, szárai a $DAB\sphericalangle$ száraival párhuzamos helyzetbe jutnak. Ezért e szögek egyenlők, azaz az $ABCD$ négyszögben A-nál és C-nél egyenlő szögek vannak. Ugyanígy adódik, hogy a négyszög másik két szemközti szöge is egyenlő, tehát a négyszög paralelogramma.

A paralelogrammának valóban megvan a feladatban leírt tulajdonsága, mert bármely csúcsból indulunk is ki, mindig a két magasság összegéhez jutunk. (Ez a megoldás *Pogáts Ferenctől* és *Herczeg Jánostól* való.)

II. megoldás. Felhasználjuk azt, hogy ha egy konvex φ szög egyik szárára a csúcstól felmérjük a t távolságot, a végpont a másik szár egyenesétől $t\sin\varphi$ távolságra van.

A négyszög betűzését úgy választjuk meg, hogy az AB és DC félegyenesek és ugyanígy a CB és DA félegyenesek messék egymást vagy párhuzamosak legyenek (7. ábra).



7. ábra

Legyen β és α e félegyenespárok hajlásszöge, párhuzamosság esetén tehát $\alpha = 0$ és $\beta = 0$ is lehetséges. Legyen továbbá $ABC\sphericalangle = \pi - \varphi$ s így $BCD\sphericalangle = \beta + \varphi$.

Jelölje C_1 és C_2 a C pont vetületét az AD, AB egyeneseken, B_1, B_2 és B_3 pedig a B pont vetületét az AD, CD és CC_1 egyeneseken. Ha a feladat követelménye a B és C csúcsokra teljesül, akkor

$$CC_1 + CC_2 = BB_1 + BB_2.$$

Minthogy $CC_1 - BB_1 = CB_3$,

$$CB_3 + CC_2 = BB_2,$$

amit e megoldás első bekezdése alapján

$$BC\sin\alpha + BC\sin(\pi - \varphi) = BC\sin(\beta + \varphi)$$

alakban írhatunk, hiszen az itt fellépő távolságokhoz úgy jutunk, hogy a $CBB_3\sphericalangle = \alpha$, $ABC\sphericalangle = \pi - \varphi$ és $BCD\sphericalangle = \beta + \varphi$ szög egyik szárára felmérjük a BC szakaszt, s a kapott végpontnak a másik szár egyenesétől való távolságát tekintjük.

Utolsó egyenletünkből BC-vel osztva

$$\sin\alpha + \sin\varphi = \sin\beta\cos\varphi + \cos\beta\sin\varphi$$

adódik. Ehhez hasonlóan, a feladat követelményének az A, B csúcsokra való teljesülésére építve azt kapjuk, hogy

$$\sin\beta + \sin\varphi = \sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi.$$

Utolsó két egyenletünket összeadva

$$(\sin\alpha + \sin\beta)(1 - \cos\varphi) + (2 - \cos\alpha - \cos\beta)\sin\varphi = 0.$$

Itt $0 < \varphi < \pi$ miatt mindkét tag második tényezője pozitív, első tényezőik viszont nem-negatívak. Az egyenlőség tehát csak úgy állhat fenn, ha

$$\sin\alpha + \sin\beta = 0, \qquad \cos\alpha + \cos\beta = 2.$$

Mivel $0 \le \alpha < \pi$ és $0 \le \beta < \pi$, mindkét eredményünkből $\alpha = \beta = 0$ következik, ami éppen azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszög parallelogramma.

Megjegyzés. Ez a megoldás valamivel egyszerűbbé válik, ha a jelölést úgy választjuk meg, hogy $\sin\alpha \ge \sin\beta$ is teljesüljön. Ekkor elég az előző bekezdés alsó egyenletére építenünk, mert ez

$$(\sin\alpha - \sin\beta) + \sin\beta(1 - \cos\varphi) + (1 - \cos\beta)\sin\varphi = 0$$

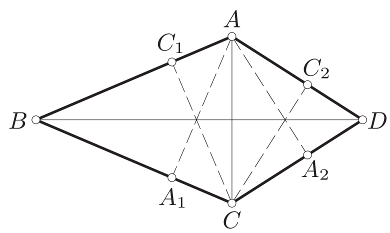
alakban írható. Itt egyik tag sem lehet negatív, és összegük $1 - \cos\varphi$ és $\sin\varphi$ pozitivitása miatt csak akkor lehet 0, ha

$$\sin\alpha = \sin\beta, \qquad \sin\beta = 0, \qquad \cos\beta = 1,$$

amiből $\alpha = \beta = 0$ következik.

III. megoldás. Abból a megállapításból indulunk ki, hogy ha egy négyszög eleget tesz a feladat követelményének, akkor az olyan másik négyszög is eleget tesz, amelynek oldalai az első négyszög oldalaival rendre párhuzamosak. Ez közvetlenül kiolvasható abból, hogy második megoldásunk a követelmény teljesülését szögek közötti összefüggésekkel fejezte ki. Nem kell azonban ehhez szögfüggvényekre sem hivatkoznunk. Elegendő annak megállapítása, hogy a 7. ábra szaggatott vonallal körülkerített részét a BC szakasz és a négy oldalirány már meghatározza. Ha tehát egy rendre párhuzamos oldalakkal bíró másik négyszögből indulunk ki, az előbbihez hasonló ábrarészhez jutunk. Eszerint a feladat követelményének a B, C pontokra való teljesülését biztosító $CB_3 + CC_2 = BB_2$ összefüggés megfelelője a másik négyszögre is teljesül. Ezért ez a négyszög is kielégíti a feladat követelményét, hiszen a B, C csúcsok szerepét itt bármely két csúcs átveheti.

A feladat követélményét kielégítő négyszög egyik oldalegyenesét párhuzamosan eltolva elérhetjük, hogy az új konvex $ABCD$ négyszög két szomszédos oldala egyenlő legyen, pl. $AB = CB$ (8. ábra).



8. ábra

Jelölje A_1, A_2 és C_1, C_2 az A és C pont vetületét a CB, CD és AB, AD egyeneseken. Minthogy fenti megállapításunk szerint a feladat követelménye az új négyszögre is teljesül,

$$AA_1 + AA_2 = CC_1 + CC_2,$$

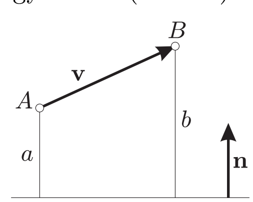
tehát az $ABC\Delta$ egyenlő szárúságából következő $AA_1 = CC_1$ miatt

$$AA_2 = CC_2.$$

Ezért a derékszögű $ACA_2\Delta$ és $CAC_2\Delta$ egybevágó, s így $ACA_2\sphericalangle = CAC_2\sphericalangle$. Az $ABC\Delta$ alapján nyugvó szögek egyenlőségét is figyelembe véve azt kapjuk, hogy az új négyszögben A-nál és C-nél elhelyezkedő szögek egyenlők, s ezért ez az eredeti négyszög megfelelő szögeire is áll. Ugyanígy adódik a másik két szemközti szög egyenlősége, tehát az is, hogy paralelogrammáról van szó. (Ez a megoldás *Böröczki Károlytól* való.)

IV. megoldás. A feladat mit sem változik, ha benne nem a csúcsnak a rajta át nem haladó oldalegyenesektől való távolságait adjuk össze, hanem mind a négy oldalegyenestől való távolság összegéről szólunk, hiszen a csúcson áthaladó oldalegyenestől való távolság 0. A feladatot most ebben az alakban tekintjük, és megoldásához a vektorokra vonatkozó alapismereteket is felhasználunk.

Legyen $\mathbf{n}$ egy félsík határegyenesére merőleges, a félsík belseje felé mutató egységvektor. Legyen A és B a félsík két pontja, a és b pedig e pontok távolsága a határegyenestől (9. ábra).

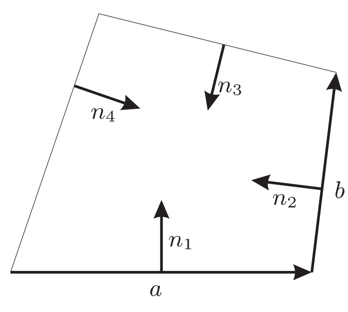


9. ábra

Felhasználjuk, hogy e távolságok különbsége, azaz az A-ból B-be vezető $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{n}$-nel párhuzamos összetevőjének előjeles hossza

$$b - a = \mathbf{vn}.$$

Legyenek $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_3}$, $\mathbf{n_4}$ a feladat követelményeit kielégítő négyszög oldalaira merőleges, a négyszög belseje felé mutató egységvektorok, továbbá $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ a négyszög két egymáshoz csatlakozó oldalvektora (10. ábra).



10. ábra

Minthogy $\mathbf{a}$ két végpontjára a négy oldalegyenestől való távolság összege ugyanakkora, e két összeg különbsége, azaz a megfelelő távolságok különbségeinek összege 0. A fentiek szerint tehát

$$\mathbf{an_1} + \mathbf{an_2} + \mathbf{an_3} + \mathbf{an_4} = \mathbf{a}\,(\mathbf{n_1} + \mathbf{n_2} + \mathbf{n_3} + \mathbf{n_4}) = \mathbf{0}.$$

A $\mathbf{b}$ vektorra ugyanígy

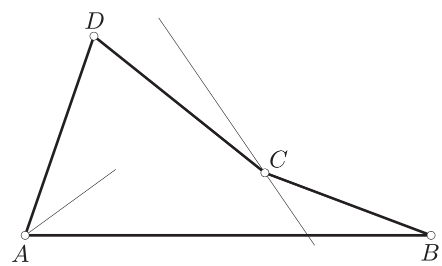
$$\mathbf{b}\,(\mathbf{n_1} + \mathbf{n_2} + \mathbf{n_3} + \mathbf{n_4}) = \mathbf{0}$$

adódik. Eszerint $\mathbf{n_1} + \mathbf{n_2} + \mathbf{n_3} + \mathbf{n_4}$ merőleges az egymással nem párhuzamos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok mindegyikére, ami csak úgy lehetséges, ha

$$\mathbf{n_1} + \mathbf{n_2} + \mathbf{n_3} + \mathbf{n_4} = \mathbf{0}.$$

Ha tehát e négy vektort egymáshoz fűzzük, zárt négyszöget kapunk. E négyszög mindegyik oldala egységnyi, tehát rombusz és szemközti oldalai párhuzamosak. Ezért az eredeti négyszög rájuk merőleges szemközti oldalai is párhuzamosak, és e négyszög valóban paralelogramma.

Megjegyzések. 1. A feladat konvex négyszögről szólt. Megmutatjuk, hogy ez a megszorítás felesleges, mert konkáv négyszögre a feladat követelménye nem teljesülhet. Legyen az $ABCD$ négyszögben a C csúcsnál konkáv szög. A C csúcson át a $DAB\sphericalangle$ felezőjére merőlegest állítunk. Ez a négyszögnek legalább egy csúcsát, pl. a B csúcsot elválasztja az A csúcstól (11. ábra), hiszen a konkáv szög nem helyezkedhetik el a merőleges egyenesnek egy oldalán.



11. ábra

Ezért az első megoldás segédtétele szerint az ott használt jelöléssel $(C,\, DAB\sphericalangle) < (B,\, DAB\sphericalangle)$. Minthogy itt a jobboldalon a B pontnak az AD egyenestől való távolsága áll, s ez kisebb, mint a B pontnak az AD, CD egyenesektől való távolságainak összege, a feladat követelménye a B és C csúcsokra valóban nem teljesülhet.

A feladat követelése konkáv négyszögekre akkor sem teljesülhet, ha az oldalegyenesektől való távolságokat előjellel látjuk el, negatívnak mondva $\mathbf{a}$ távolságot, ha $\mathbf{a}$ pont az oldalegyenesnek a másik oldalán van, mint amerről a négyszög az oldalra támaszkodik. Negyedik megoldásunk ezt is bebizonyítja.

2. A második és negyedik megoldás mutatja, hagy a feladat állításának helyességét már az is biztosítja, ha csak három csúcsra követeljük meg a távolságösszegek egyenlőségét. Ha ez az összeg három csúcsra egyenlő, akkor eszerint a negyedik csúcsra is ugyanakkora.

A legutóbbi mondat megállapítása messzemenően általánosítható. Negyedik megoldásunk mintájára könnyen belátható, hogy ha a síkban véges sok egyenest adunk meg, mindegyiknél megszabva, hogy melyik oldalán elhelyezkedő pontokra mondjuk a pontnak az egyenestől való távolságát pozitívnak és melyikre negatívnak, ha továbbá a sík három nem egy egyenesen levő pontjára az egyenesektől való távolságok összege ugyanakkora, akkor a sík minden pontja ugyanekkora távolságösszeget ad. Ez többek között azt is jelenti, hogy ha egy konvex n-szög esetében három csúcsra az oldalegyenesektől való távolságok összege ugyanakkora, akkor ugyanekkora minden csúcsra, sőt az n-szög minden pontjára is. A negyedik megoldás alapján könnyen belátható, hogy egy konvex n-szögnek akkor van meg a most említett tulajdonsága, ha oldalai egy egységoldalú konvex n-szög oldalaira rendre merőlegesek.