A feladatban konvex sokszög szerepel, de ez a megszorítás nyilván lényegtelen, a következőkben nem is támaszkodunk rá. Ilyen megszorítás nélkül azonban zavarhatná a megoldót az a kérdés, vajon felbontható-e minden sokszög egymást nem metsző átlókkal háromszögekre. Ez így van, de ennek bizonyítása nem könnyű.

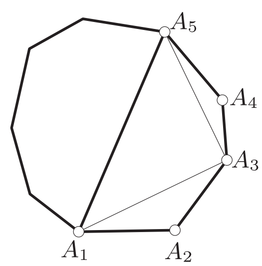
Lényegtelenül módosul a feladat, ha egymást nem metsző átlókkal való felbontás helyett az n-szöget olyan háromszöghalmaz egyesítéseként állítjuk elő, amelyben minden háromszög minden csúcsa az n-szög csúcsai közül való, s amelyben nincs két egymásra boruló háromszög. Ez az átszövegezés csak annyit változtat, hogy így a feladat az $n = 3$ esetben sem veszti értelmét, mert a háromszöghalmaz egyetlen elemből, magából a háromszögből is állhat. Eszerint ebben az esetben a feladat követelése és állítása is teljesül.

I. megoldás. Minden a felbontásban szereplő átló a sokszöget két sokszögre vágja fel. Tekintsük az így keletkező részsokszögek oldalszámának minimumát. Azt állítjuk, hogy ez a minimum 3, hogy tehát szerepel olyan átló, amely sokszögünkből háromszöget vág le. Ha ugyanis a minimum $k > 3$ volna és pl. az A_1A_k átló által levágott $A_1A_2 \ldots A_{k-1}A_k$ sokszög valósítaná meg, akkor kellene, hogy e k-szög egy A_iA_j átlója is szerepeljen a felbontásban, hiszen háromszögekre való felbontásról van szó. Mivel az A_iA_j átló által levágott $A_iA_{i+1} \ldots A_j$ sokszög oldalszáma k-nál kisebb, k valóban nem lehet minimum.

A vizsgált részsokszögek között van 3-nál nagyobb oldalszámú is, mert különben egy átló a sokszöget két háromszögre bontaná fel, s ennek végpontjaiban a feladat követelésével ellentétben 2 háromszög találkoznék.

A vizsgált részsokszögek között nincs négyszög, mert ezt egy a felbontásban szereplő átlónak két háromszögre kellene felbontania, és így ennek az átlónak egyik végpontjában 2 háromszög találkoznék.

Ezek szerint a vizsgált részsokszögek oldalszámai között van 3-nál nagyobb, s ezek között a 3-nál nagyobb oldalszámok közül a legkisebbnek az értéke legalább 5. Legyen pl. az A_1A_k átló által levágott $A_1A_2 \ldots A_{k-1}A_k$ ilyen legkisebb oldalszámú, de háromszögtől különböző részsokszög. Beláttuk már, hogy $k \geq 5$.



1. ábra

Minthogy a felbontás a most említett részsokszöget is háromszögekre bontja fel, felbontásában egy $A_1A_iA_k$, háromszög is fellép. k minimum-tulajdonsága miatt sem A_1A_i, sem A_iA_k nem vághat le 3-nál nagyobb oldalszámú (és természetesen k-nál kisebb oldalszámú) sokszöget, ezért $i \leq 3$ és $k - i + 1 \leq 3$. Ezek az egyenlőtlenségek a fenti $k \geq 5$ eredménnyel együtt

$$0 \leq k - 5 \leq i - 3 \leq 0$$

alakban írhatók, s innen $k = 5$ és $i = 3$ adódik.

Ezzel beláttuk, hogy sokszögünk felbontásában fellép olyan átló, amely ötszöget vág le, s hogy ezt az ötszöget a felbontó átlók három olyan háromszögre vágják fel, amelyek közül az ötszöget levágó átló végpontjaiban kettő-kettő találkozik (1. ábra). Hagyjuk el eredeti sokszögünkből ezt az ötszöget. Ezáltal a sokszög oldalszáma 3-mal csökken, a megmaradó sokszög átlókkal való felbontása viszont változatlanul eleget tesz a feladat követelményének, hiszen az egy csúcsba futó háromszögek száma csak két csúcsnál ad új értéket, s ott 2-vel csökkent.

Eszerint eljárásunkat a kapott sokszögre újból alkalmazhatjuk, ezt folytatva a sokszög oldalszámát minden lépésben 3-mal csökkenthetjük mindaddig, amíg a maradó sokszögben még van átló, amíg tehát háromszöghöz nem jutunk. Ezért az eredeti sokszög oldalszáma valóban osztható 3-mal.

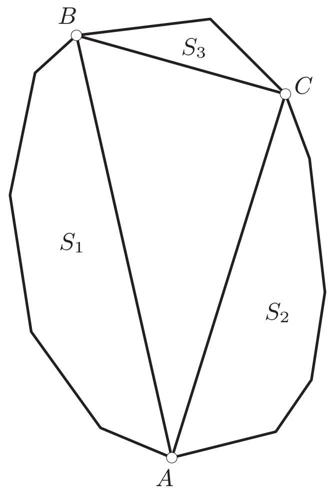
Megoldásunkból az is kiolvasható, hogy ha n osztható 3-mal, akkor a konvex n-szög felbontható a feladat követelményét kielégítő módon.

II. megoldás. A bizonyítást n-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük el. A feladat szövege után említettek szerint az állítás az $n = 3$ esetben helyes. Elegendő tehát azt bizonyítanunk, hogy ha a feladat állítása egy $n > 3$ értéknél kisebb oldalszámú sokszögekre helyes, akkor n-szögekre is helyes.

Ezt a bizonyítást egy megjegyzéssel készítjük elő. Azt állítjuk, hogy ha egy sokszöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontunk fel, és a sokszög csúcsairól egynek kivételével tudjuk, hogy az páratlan sok háromszögnek a csúcsa, akkor ez minden csúcsra igaz. Ennek igazolása végett arra hivatkozunk, hogy minden átlónak két vége van, tehát az átlóvégek száma páros. Minthogy a kivételes csúcstól eltekintve minden csúcsról tudjuk, hogy páratlan sok háromszög ér oda, tehát ott páros sok (esetleg 0) átlóvég helyezkedik el, a kivételes csúcsra is páros sok átlóvég marad, s így az is páratlan sok háromszög csúcsa.

A teljes indukciós bizonyításra térve tekintsünk egy a feladat követelményét kielégítő módon felbontott, $n > 3$ oldalú sokszöget, s ennek egy a felbontásában fellépő AB átlóját. Minthogy az A csúcsban ettől az átlótól eltekintve páratlan sok átló vége helyezkedik el, az AB átló egyik oldalán ezeknek az átlóvégeknek a száma páros. Ezen az oldalon az AB átló n-szögünkből egy S_1 sokszöget vág le. Az n-szög felbontása S_1-et is háromszögekre bontja fel. Erről a felbontásról megállapíthatjuk, hogy minden B-től különböző csúcsnál páros sok átlóvég helyezkedik el. Az előre bocsátott megjegyzés szerint tehát ez B-re is teljesül, azaz S_1 felbontása eleget tesz a feladat követelményének.

Az AB átlóihoz az S_1-gyel átellenes oldalon a felbontás egy ABC háromszöge támaszkodik (2. ábra).



2. ábra

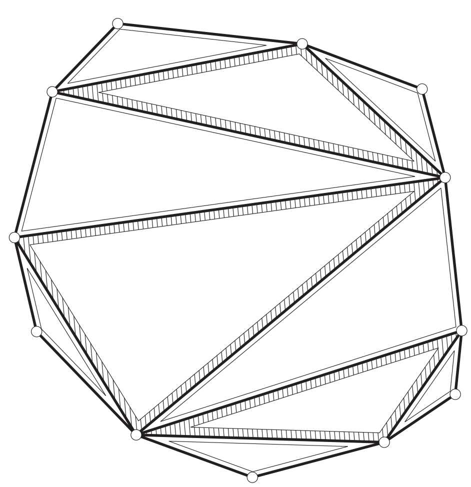
E háromszög AC, BC oldalai a háromszöggel átellenes oldalon n-szögünkből az S_2 és S_3 sokszöget vágják le. Az n-szöget eszerint az ABC háromszögre és az S_1, S_2, S_3 sokszögekre bontottuk fel.

Minthogy az n-szöget felbontó átlók A-nál elhelyezkedő végei közül S_1 belsejében páros sok van és kettő az ABC háromszög oldalának vége, S_2 belsejében is páros sok helyezkedik el. Ugyanezt a B csúcsról és az S_3-ban elhelyezkedő átlóvégekről is elmondhatjuk. Az előre bocsátott megjegyzés szerint tehát S_2 és S_3 felbontása is eleget tesz a feladat követelményének.

Mivel S_1, S_2 és S_3 oldalszáma n-nél kisebb, indukciós feltevésünk szerint mindegyiknek az oldalszáma osztható 3-mal. Ezeknek az oldalszámoknak az összege azonban $n+3$, hiszen az ABC háromszög oldalai lépnek fel többletként. Így tehát n is osztható 3-mal.

III. megoldás. Először bebizonyítjuk, mégpedig teljes indukcióval, hogy egy sokszög egymást nem metsző átlókkal háromszögekre való felbontásakor a háromszögek két színnel kiszínezhetők úgy, hogy egyszínű háromszögeknek ne legyen közös oldala. Ez egyetlen háromszögre semmitmondóan igaz. Legyen tehát $n > 3$, és tegyük fel, hogy az állítás n-nél kisebb oldalszámú sokszögekre igaz. Az egyik átló az n-szöget két sokszögre vágja fel. Minthogy ezek oldalszáma n-nél kisebb, indukciós feltevésünk szerint mindkettő a kívánt módon kiszínezhető a két színnel. Az egyikben a színeket esetleg felcserélve azt is elérhetjük, hogy a kettévágó átlóhoz a két sokszögben más-más színű háromszög támaszkodjék. Ilyen módon az n-szögnek a követelményünket kielégítő kiszínezéséhez jutottunk el.

Ha az n-szög felbontása eleget tesz feladatunk követelményének, akkor a háromszögek említett kiszínezésekor az n-szög oldalaihoz mindenütt ugyanolyan színű háromszög támaszkodik. Ezt elegendő két szomszédos oldalra belátnunk, s ezekre abból következik, hogy találkozási pontjukba páratlan sok háromszög ér el, s mivel ezek felváltva más-más színűek, a két szélső, tehát a sokszög említett két oldalára támaszkodó, ugyanolyan színű. A 3. ábra ilyen színezést mutat be.



3. ábra

Az egyik színt a világos, a másikat a sötét keretezés szemlélteti. Ábránkban a sokszög határára mindenütt világos keretű háromszög támaszkodik.

Ha v világos és s sötét keretű háromszög szerepel, akkor ezeknek összesen $3v$ világosan és $3s$ sőtéten keretezett oldaluk van. Legyen a sokszög minden oldala világosan keretezett. Átlói két oldalról más-más keretet kaptak. Ezért a világosan keretezett oldalak számából a sötéten keretezettekét levonva a sokszög oldalszámát kapjuk meg:

$$n = 3v - 3s,$$

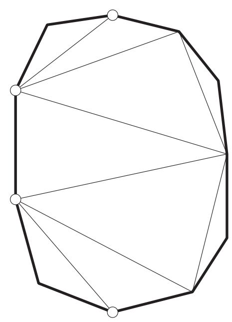
n tehát valóban 3-mal osztható.

Megjegyzések. 1. Második megoldásunk mintájára könnyű bebizonyítani a feladat állításának következő általánosítását: *Egy konvex sokszöget egymást nem metsző átlók k-szögekre bontanak fel. A konvex sokszög minden csúcsa páratlan sok ilyen k-szög csúcsa. A sokszög oldalszáma ekkor*

$$k[1 + m(k - 2)]$$

alakú, ahol m természetes szám. A bizonyítást az olvasóra hagyjuk.

2. Ugyancsak feladatként említjük meg *Gallai Tibornak* azt az eredményét, amely harmadik megoldásunk mintájára könnyen igazolható, s amely a következőképpen szól: *Ha egy konvex sokszöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontunk fel, akkor az a páros sok csúcs, amelyben páros sok háromszög találkozik, a sokszög határvonalát töröttvonalakra bontja fel. Ha e töröttvonalak oldalszámait sorra váltakozó előjelekkel ellátva összeadjuk, 3-mal osztható eredményhez jutunk.*



4. ábra

A 4. ábra sokszögénél a szóban forgó csúcsokat körökkel jelöltük meg. Ha a legalsó ilyen csúcstól pozitív forgásirányban haladunk, akkor váltakozó előjelekkel képzett összegként $6 - 2 + 1 - 2$ adódik, ami valóban 3-mal osztható. Eredeti feladatunk a most közölt eredménynek azt a határesetét tartalmazza, amikor 0 azoknak a csúcsoknak a száma, ahol páros sok háromszög találkozik.