A feladat egy elem kétszereséről és két elem összegéről szól. Szólhatott volna ehelyett két nem feltétlenül különböző elem összegéről, megoldásaink azonban az eredeti szöveghez igazodnak.

I. megoldás. Először azt bizonyítjuk be, hogy ha c a halmaznak egy eleme és n természetes szám, akkor nc is a halmazhoz tartozik. Ezt n-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük. Minthogy maga c és a feladat feltevése szerint $2c$ is a halmazhoz tartozik, elég belátnunk, hagy ha $n>1$ és nc a halmazban van, akkor $(n+1)\,c$ is a halmaz eleme. Ez a feladat feltevéséből valóban következik, hiszen $(n+1)\,c=nc+c$, tehát a halmaz két elemének összegével egyenlő.

Legyen $a>0$ a halmaz legkisebb pozitív eleme, $b<0$ pedig a halmaz legnagyobb (azaz legkisebb abszolút értékű) negatív eleme. Minthogy $a+b$ a halmazhoz tartozik, és rá

$$b<a+b<a,$$

viszont sem a-nál kisebb pozitív, sem b-nél nagyobb negatív szám nem lehet, azért csak 0-val lehet egyenlő. Eszerint 0 a halmaz eleme és $b=-a$. Ebből következik, hogy a minden egész számú többszöröse a halmazhoz tartozik, hiszen ez az na, 0, nb számok mindegyikére igaz, akármekkora is az n természetes szám.

Azt állítjuk, hogy a egész számú többszörösein kívül nincs a halmaznak más eleme. Tegyük fel ezzel ellentétben, hogy van a halmazban olyan x elem, amely a két szomszédos egész számú többszöröse, qa és $(q+1)\,a$ között van. Ez az elem

$$x=qa+r \qquad\qquad (0<r<a)$$

alakban volna írható. Ebből azonban az következnék, hogy

$$r=x+(-q)a$$

is a halmazhoz tartozik, hiszen a halmaz két elemének összege. Ez azonban $0<r<a$ miatt ellentmond a megválasztásának, s így állításunk helyességét igazolja.

A feladat állításának helyessége most már következik abból, hogy a két egész számú többszörösének különbsége a-nak ugyancsak egész számú többszöröse.

II. megoldás. Felhasználjuk az első megoldás első bekezdésének eredményét. Bebizonyítjuk, hogy ha a a halmaz eleme, akkor $-a$ is a halmazhoz tartozik.

Feltehetjük, hogy $a\neq 0$. Legyen b a halmaznak egy a-val ellentétes előjelű eleme. Eszerint

$$|\,b\,|\,a+|\,a\,|\,b=0,$$
$$-a=[\,|\,b\,|-1]\,a+|\,a\,|\,b.$$

Ha $|\,b\,|=1$, akkor a jobboldal első tagja 0. Eszerint $-a$ vagy b természetes számszorosa, vagy a és b természetes számszorosának összege, tehát mindenképpen a halmaz eleme.

Eszerint a halmaz két elemének különbsége, azaz egy elemének és egy másik elem (-1)-szeresének összege szintén a halmazhoz tartozik.

Megjegyzés. Második megoldásunkból csekély módosítással következik, hogy a feladat állítása akkor is helyes, ha benne egész számokból álló halmaz helyett racionális számokból álló halmazról van szó.

Ehhez csak azt kell meggondolnunk, hogy az első megoldás első bekezdése változatlanul helytálló marad, s hogy az ellentétes előjelű a, b racionális számokhoz találhatók olyan m, n természetes számok, amelyekre $ma+nb=0$. Ebből ugyanúgy következtethetünk tovább, ahogyan a második megoldásban tettük.