Megmutatjuk, hogy vannak kívánt tulajdonságú A, B számhalmazok, s ehhez elég egyetlenegy példát megadnunk.

Tartozzanak az A halmazhoz mindazok a nem-negatív egész számok, amelyeknek minden 0-tól különböző tizedesjegye (a szám végétől visszafelé számítva) páratlanadik helyen áll, B-hez pedig azok, amelyeknek minden 0-tól különböző jegye párosadik helyen helyezkedik el. A 0 eszerint mind a két halmazhoz hozzátartozik, hiszen nincs 0-tól különböző tizedesjegye.

Ha egy-egy A-hoz és B-hez tartozó számot összeadunk, akkor az összeg tizedesjegyei éppen a két szám megfelelő tizedesjegyei lesznek, hiszen ugyanazon a helyen mindig csak az egyikben állhat 0-tól különböző számjegy, s ez lesz az összeg tizedesjegye. Bármely nem-negatív egész szám páratlanadik jegyeiből egy A-hoz, párosadik jegyeiből egy B-hez tartozó számot alkothatunk, s ezek összege a fentiek szerint éppen az a szám lesz, amelyből kiindultunk. A két halmaz más számainak összege nem lehet ugyanez az érték, mert valahol más tizedesjegynek kell bennük szerepelnie, s akkor ezt összegük is tartalmazza.

Ha pl. 1967-ből indulunk ki, akkor ebből az A-hoz tartozó 907 és a B-hez tartozó 1060 adódik. Ezek összege valóban 1967.

Meg kell még állapítanunk, hogy az A, B halmazok mindegyike végtelen halmaz. Ez igaz, mert végtelen sok páratlanadik és végtelen sok párosadik tizedeshely van.

Megjegyzések. 1. A feladat megoldásaként csak egyetlenegy példát adtunk meg. Sok más példát is megadhattunk volna.

Eljárásunk változatlanul alkalmazható, ha nem tízes, hanem tetszőleges alapú számrendszert használunk. Legtetszetősebbnek talán a kettes számrendszer választásakor adódó példa mondható.

Megoldásunkban a (szám végétől visszafelé számlált) páratlanadik és párosadik tizedeshelyek szolgáltatták a két számhalmazt. Ehelyett a tizedeshelyeket akárhogyan is eloszthattuk volna két csoportba, mindenesetre azonban úgy, hogy mindkét csoport végtelen sok tizedeshelyet tartalmazzon. Így pl. sorolhatnók az egyikbe azokat a tizedeshelyeket, amelyeknek a szám végétől visszafelé számított sorszáma 3-mal osztható, s a másikba a többit. Vagy az egyikbe azokat, amelyeknek a sorszáma törzsszám, s a másikba a többit. Ilyen módon újabb példákhoz juthatunk természetesen akkor is, ha nem a tízes számrendszert használjuk.

További példákhoz jutunk, ha változó alapú számrendszerből indulunk ki. Ez a következőt jelenti: tetszőlegesen megválasztjuk az 1-nél nagyobb k_1, k_2, $\ldots$ alapszámokat; ezekkel minden nem-negatív egész számot kifejezhetünk

$$c_1 + c_2k_1 + c_3k_1k_2 + c_4k_1k_2k_3 + \ldots$$

alakban, ahol a $c_1, c_2, \ldots$ számjegyek mindegyikére teljesül a $0 \le c_i < k_i$ megszorítás, és természetesen minden szám kifejezésében csak véges sok számjegy szerepel. Egy szám számjegyeihez úgy juthatunk el, hogy azt k_1-gyel osztva c_1 lesz a maradék, a hányadost k_2-vel osztva maradékként c_2 adódik, majd a hányadosokat mindig tovább osztva a többi számjegyet is megkapjuk. Ilyen változó alapú számrendszerre változatlanul alkalmazhatjuk megoldásunk eredeti eljárását, s így a feladat kérdésére adott válasz helyességét bizonyító újabb példákat kapunk. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy minden korábban említett példa ennek a most ismertetett példának speciális esete.

2. Megmutatjuk, hogy a most megismert példa a legáltalánosabb, hogy tehát a feladat követelményét kielégítő bármely A, B halmazpárhoz el lehet jutni a változó alapú számrendszer alapszámainak megfelelő megválasztása után megoldásunk eredeti módszerével.

Legyen tehát A és B a feladat követelményét kielégítő két számhalmaz. Eszerint minden nem-negatív egész szám pontosan egyféleképpen állítható elő A és B egy-egy elemének összegeként. Ha a következőkben előállításról szólunk, mindig ilyen előállításra gondolunk. Jelölje $a(n)$ és $b(n)$ a két halmaznak azt az elemét, amelyek n előállításában fellépnek, amelyekre tehát $n = a(n) + b(n)$.

A 0 mindkét halmaz eleme, mert különben 0 nem volna a két halmaz egy-egy elemének összegeként előállítható. A két halmaznak nincs más közös eleme, mert ha n ilyen volna, akkor n kétféleképpen is előállítható volna, ti. $n + 0$ és $0 + n$ alakban. Valamelyik halmaz elemei között 1 is szerepel, mert különben 1 nem volna előállítható. Legyen A ez a halmaz, s legyen k_1 az a legkisebb természetes szám, amely A-nak nem eleme.

Azt állítjuk, hogy k_1 szerepel B-ben. $b(k_1)$ nem lehet 0, mert ebből $a(k_1) = k_1$ következnék, pedig k_1 nem tartozik A-hoz. Nem lehet $b(k_1)$ az $1, 2, \ldots, k_1 - 1$ számok egyikével sem egyenlő, mert mindezek A elemei. Ezért szükségképpen $b(k_1) = k_1$, tehát k_1 valóban eleme a B halmaznak.

A nem-negatív egész számokat k_1 számból álló „szakaszokba” osztjuk be. Egy ilyen szakasz a

(*) $$tk_1,\ tk_1 + 1,\ \ldots,\ tk_1 + (k_1 - 1)$$

számokból áll. *Azt állítjuk, hogy egy-egy ilyen szakasz x számaira $b(x)$ értéke azonos, s hogy ez az érték k_1 többszöröse.* Ez persze azt is jelenti, hogy a szakasz számaihoz tartozó $a(x)$ értékek ugyancsak egy teljes szakaszt alkotnak.

Állításunkat t-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk be. Az állítás a $t = 0$ értékre teljesül, hiszen a kezdőszakasz minden elemére $b(x) = 0$. Feltesszük, hogy állításunk a tk_1 számot megelőző szakaszok mindegyikére helyes, bebizonyítjuk, hogy helyes a (*) szakaszra is.

Feltevésünkből következik, hogy az A halmaz tk_1-nél kisebb elemei teljes szakaszokat alkotnak, hiszen A minden eleme fellép saját magának az előállításában, hozzá B-ből a 0 elemet adva, s akkor a tartalmazó szakasz minden elemére $b(x) = 0$, a megfelelő $a(x) = x$ értékek tehát valóban egy teljes szakaszt alkotnak. Feltevésünkből az is következik, hogy a B halmaz tk_1-nél kisebb elemei mindannyian k_1 többszörösei, hiszen mindegyik fellép a saját előállításában (A-ból a 0 elemet adva hozzá), s azért az indukciós feltevés reá is vonatkozik.

Tekintsük most már a (*) szakasz számainak előállítását. Ha e szakasz valamelyik x elemére $a(x) < tk_1$ és $b(x) < tk_1$, akkor utolsó megállapításunk szerint $b(x)$ osztható k_1-gyel, s így az $a(x)+b(x)$ összegben $a(x)$ helyébe az ezt az értéket tartalmazó és A-hoz tartozó szakasz elemeit írva a (*) szakasz minden elemének előállításához eljutunk. Ilyenkor tehát a bizonyítandó állítás teljesül.

Azt az esetet kell már csak vizsgálnunk, amikor (*) minden elemének előállításában szerepel tk_1-nél nem kisebb szám is. Maga tk_1 tehát vagy tk_1+0, vagy $0+tk_1$ módon állítható elő. Az utóbbi esetben 0 helyébe az A-hoz tartozó $1, 2, \ldots, k_1-1$ számokat írva ismét eljutunk (*) minden elemének olyan előállításához, amelyre állításunk teljesül.

Legyen tehát $a(tk_1) = tk_1$. Ekkor tk_1 az A halmaz eleme. A (*) szakasz többi eleme sem tartozhatik B-hez, mert ha $tk_1 + c_1$ odatartozněk, ahol $0 < c_1 < k_1$, akkor

$$(k_1 - c_1) + (tk_1 + c_1) = tk_1 + k_1$$

ugyanannak a számnak kétféle előállítása volna. Eszerint a (*) szakasz x elemére $b(x) \geq tk_1$ nem teljesülhet, s ezért a vizsgált eset tulajdonsága miatt szükségképpen $a(x) \geq tk_1$, amiből $x < tk_1 + k_1$ miatt $b(x) < k_1$ következik. Minthogy azonban B a k_1-nél kisebb számok közül csak a 0-t tartalmazza, a $b(x) = 0$ eredményhez jutunk (amiből az is következik, hogy a teljes (*) szakasz A-hoz tartozik). Eszerint a bizonyítandó állítás most is teljesül.

Indukciós okoskodásunk befejezése után megállapíthatjuk, hogy az A halmaz teljes „szakaszokból" áll, s hogy B minden eleme k_1 többszöröse. Mindkét halmaz teljes ismeretéhez elég eszerint azt tudnunk, hogy k_1 többszörösei közül melyeket tartalmazzák.

Tekintsünk olyan változó alapú számrendszert, amelynek első alapszáma k_1. Eredményünk szerint ebben a számrendszerben B minden elemének első jegye 0, viszont A bármely elemének első jegyét tetszőlegesen megváltoztatva megint A eleméhez jutunk.

Azt vizsgáljuk, hogy k_1 többszörösei közül melyek tartoznak a két halmazhoz. Álljon az A_1 halmaz azokból a nemnegatív n egész számokból, amelyekre nk_1 az A halmaz eleme, B_1 pedig azokból, amelyekre nk_1 a B halmaz eleme. Az A_1, B_1 halmazok rendelkeznek az A, B halmazoknak a feladatban foglalt tulajdonságaival, hiszen k_1 többszörösei is egyféleképpen állíthatók elő és előállításukban a fentiek szerint csak k_1 többszörösei lépnek fel. Különbség van azonban A és B, valamint A_1 és B_1 szereposztásában, mert mintegy szerepet cserélnek. Azt a halmazt jelöltük A-val, amelynek 1 eleme, most viszont B_1 játssza ezt a szerepet, hiszen 1 ennek eleme, mert k_1 a B halmazhoz tartozik.

Az A_1, B_1 halmazokra elvégezhetjük ugyanazt az okoskodást, amelyet az A, B halmazokra már elvégeztünk. Ezt azzal kezdjük, hogy a legkisebb, B_1 hez nem tartozó természetes számot k_2-vel jelöljük. Így azt kapjuk, hogy A_1 minden eleme k_2 többszöröse, B_1 pedig k_2 számból álló teljes „szakaszokból" áll. Ha k_2-t választjuk számrendszerünk második alapszámául, akkor tehát elmondhatjuk, hogy A minden elemének második jegye 0, viszont B minden elemének második jegyét szabadon megváltoztathatjuk, s megint B eleméhez jutunk.

Ezt az eljárást minden határon túl folytathatjuk, hiszen végtelen halmazokból indultunk ki. Eljutunk tehát egy változó alapú számrendszer k_1, $k_2 \ldots$ alapszámainak végtelen sorozatához. Minthogy a növekvő indexű halmazok állandóan szerepet cserélnek, ahhoz az eredményhez jutunk, hogy A elemeinek minden párosadik jegye 0, páratlanadik jegyeik pedig tetszőlegesek, a B halmaz elemeinél viszont fordítva, minden páratlanadik jegyük 0, és párosadik jegyeik tetszőlegesek. Megoldásunk eredeti módszere tehát valóban ehhez a két halmazhoz vezet el, ha az előírásunknak megfelelő változó alapú számrendszert használjuk.

3. A feladat két általánosítását említjük még meg. A részletek kidolgozását azonban már az olvasóra bízzuk.

A feladat kérdésére igennel kell felelni akkor is, ha nem két végtelen halmazról, hanem kettőnél többről van a feladatban szó. Ez első megjegyzésünknek ahhoz az észrevételéhez kapcsolódik, hogy a tizedeshelyeket akárhogyan beoszthatjuk két (végtelen sok tizedeshelyet tartalmazó) csoportba. Ha nem két, hanem kettőnél több csoportba osztjuk be őket, akkor a mondott általánosításhoz jutunk.

Igennel kell felelni a feladat kérdésére akkor is, ha benne nem-negatív egész számok helyett egész számokat mondunk. Ennek megvilágítása érdekében a végtelen

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots$$

szorzatot tekintjük. Ha itt a beszorzást formálisan elvégezzük, x minden nemnegatív egész kitevőjű hatványának összege adódik eredményül. Ha a szorzat tényezőit két csoportba szedve, pl. csak a páratlanadikokat, majd csak a párosadikokat szorozzuk össze, akkor az adódó két kifejezésben fellépő kitevők példát adnak olyan A, B halmazokra, amilyenekről a feladat szólt. Ha most a fenti szorzat helyett az

$$(1+x)(1+x^{-2})(1+x^4)(1+x^{-8})\ldots$$

szorzatot tekintjük, akkor a beszorzás x minden egész kitevőjű hatványának összegét adja, s a tényezők két csoportba szedésekor fellépő kitevőhalmazok az egész számok körében kimondott általánosítás helyességét támasztják alá.