

Bebizonyítjuk, hogy a tizedesvesszőt követő első  $n$  jegy 0 vagy 9-es, hogy tehát a vizsgált szám egy egész számtól  $10^{-n}$ -nél kevesebbel tér el. Ehhez elég belátni, hogy

$$(5 + \sqrt{26})^n + (5 - \sqrt{26})^n$$

egész szám, s hogy

$$\left| 5 - \sqrt{26} \right| < \frac{1}{10}.$$

Az utóbbi számítással könnyen ellenőrizhető, de abból is adódik, hogy  $5,1^2 = 26,01 > 26$ , s ezért

$$5 < \sqrt{26} < 5,1.$$

A még bebizonyítandó állítás  $p(x) = (5 + x)^n$  jelöléssel azt mondja ki, hogy  $p(\sqrt{26}) + p(-\sqrt{26})$  egész szám. Ez valóban igaz, mert ha a  $p(x)$  polinomban  $x$  helyébe  $(-x)$ -et írunk, az  $x$  páratlan kitevős hatványait tartalmazó tagok előjele megváltozik, s ezért az egész együttthatós  $p(x) + p(-x)$  polinomban csak  $x$  páros kitevőjű hatványai szerepelnek. Így tehát e polinom értéke az  $x = \sqrt{26}$  helyen valóban egész szám.

Minthogy  $5 - \sqrt{26}$  negatív, megoldásunk azt is mutatja, hogy páratlan  $n$  esetén a tizedesvesszőt követő első  $n$  jegy 0, páros  $n$  esetén pedig 9-es.

**Megjegyzések.** 1. Nem volt szükségünk a binomiális tételre, bár megtehetjük volna, hogy a  $p(x)$  polinom együttthatóit a binomiális tétel segítségével fel is írjuk.

2. Megoldásunkból könnyen kiolvasható, hogy ha  $n$  elég nagy, akkor a tizedesvesszőt  $n$ -nél több egyenlő jegy követi. Megemlítjük, hogy ez első ízben az  $n = 234$  kitevőre következik be.